

直线与圆常考问题透视

■ 中山 高建彪

应考方略

解析几何是用代数方法来研究几何问题的一大数学分支.中学阶段所学的解析几何知识包括“直线与圆”与“圆锥曲线”两大块,在高考中约占30分.直线和圆一般以基础题的形式呈现在考卷中.纵观近几年全国各地高考卷中直线和圆的内容,归类如下:

一、方程问题

例1 (2006 天津卷) 若半径为1的圆分别与y轴的正半轴和射线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ($x \geq 0$) 相切,则这个圆的方程为_____.

解析 若半径为1的圆分别与y轴的正半轴和射线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ($x \geq 0$) 相切,则圆心在直线 $y = \sqrt{3}x$ 上,且圆心的横坐标为1,所以纵坐标为 $\sqrt{3}$.

故,这个圆的方程为 $(x-1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 1$.

点评 直接由已知条件与几何性质求出圆心和半径,写出圆的标准方程;也可以用待定系数法,设圆标准方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 或一般方程 $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$,代入已知条件列出三个方程并求解.在求解直线或圆的方程问题时,离不开待定系数法、代入法、方程思想、几何性质等通法的运用.

二、相切问题

例2 (2004 辽宁卷) 若经过点 $P(-1,0)$ 的直线与圆 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ 相切,则此直线在y轴上的截距是_____.

解析 圆的标准方程为 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$,则圆心 $C(-2,1)$,半径 $r = \sqrt{2}$.

设过点 $P(-1,0)$ 的直线方程为 $y = k(x+1)$,即 $kx - y + k = 0$.

$\therefore$ 圆心到切线的距离 $d = \frac{|-2k-1+k|}{\sqrt{k^2+1}} = r = \sqrt{2}$,解得 $k = 1$.

$\therefore$ 直线方程为 $y = x + 1$,在y轴上的截距是1.

点评 研究直线和圆的相切,简捷的方法是利用公式 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = r$,还可以由方程组只有一个实根进行解答.选择恰当的方法,是我们解题的一种能力.

三、公共点问题

例3 (2006 湖北卷) 若直线 $y = kx + 2$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 有两个不同的交点,则k的取值范围是_____.

解析 由直线 $y = kx + 2$ 与圆 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 有两个不同的交点,可得直线与圆的位置关系是相交.

故圆心到直线的距离小于圆的半径,即 $\frac{|2k-3+2|}{\sqrt{1+k^2}} < 1$,解得 $k \in (0, \frac{4}{3})$.

点评 研究直线与圆的公共点,可以比较圆心到直线的距离d与圆的半径r的大小关系.当 $d < r$ 时,直线与圆相交,有两个公共点;当 $d = r$ 时,直线与圆相切,只有一个公共点;当 $d > r$ 时,直线与圆相离,没有公共点.当然,我们还可利用方程思想解答.

四、对称问题

例4 (2004 全国卷II) 已知圆C与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 关于直线 $y = -x$ 对称,则圆C的方程为().

- A. $(x+1)^2 + y^2 = 1$ B. $x^2 + y^2 = 1$
C. $x^2 + (y+1)^2 = 1$ D. $x^2 + (y-1)^2 = 1$

解析 已知圆的半径 $r = 1$,圆心坐标为 $(1,0)$,且圆心 $(1,0)$ 关于直线 $y = -x$ 的对称点为 $(0,-1)$,则圆C的方程为 $x^2 + (y+1)^2 = 1$.故选C.

点评 圆关于直线的对称图形仍然是圆,半径不变,圆心关于直线对称.我们要掌握一些常见对称问题的解答思路,例如点关于直线的对称、曲线关于直线的对称、曲线关于点的对称等.解答理论基础有中点坐标公式、垂直时斜率乘积为-1、代入法、转化思想.同时,我们也要掌握一些简单对称,如点 (a,b) 关于直线 $y = x$ 的对称点为 (b,a) .

五、距离问题

例5 (2006 湖南卷) 若圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 上至少有三个不同点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则直线l的倾斜角的取值范围是().

- A. $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}]$ B. $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ C. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$ D. $[0, \frac{\pi}{2}]$

解析 将圆 $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$ 整理为 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = (3\sqrt{2})^2$,由此可知,圆心坐标为 $(2,2)$,半径为 $3\sqrt{2}$.

要求圆上至少有三个不同的点到直线 $l: ax + by = 0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$,则圆心到直线的距离应不大于 $\sqrt{2}$,即有 $\frac{|2a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{2}$,整理为 $(\frac{a}{b})^2 + \frac{4a}{b} + 1 \leq 0$,解得 $-2-\sqrt{3} \leq \frac{a}{b} \leq -2+\sqrt{3}$;又 $k = -\frac{a}{b}$,可得 $2-\sqrt{3} \leq k \leq 2+\sqrt{3}$.

由此不难得出直线l的倾斜角的取值范围是 $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$.正确答案选B.

政治辨析题的解题步骤与方法

■ 东莞 范竹发

应考方略

在高考政治考试中,被普遍认为难度较高的题型是辨析题。近几年它也逐渐抛弃了非此即彼的单向型辨题,向既辨又析、辨析结合、重在分析的方向发展,不仅检测考生对政治、经济和哲学等基本原理的掌握和应用能力,更倾向于考查考生的辩证思维能力,难度有所增长。要解答好此种题型,在牢固掌握基础知识的基础上,进一步了解解题的基本步骤与方法则如虎添翼。

一、基本步骤

1. 审题。即要找出辨题的“题眼”,弄清楚题目考查的知识属于政治生活、经济生活、文化生活还是生活与哲学的范畴,判定题目考查的知识范围和知识点。只有明确了“题眼”,才能在大脑中形成与该“题眼”相关的一系列知识内容,为答题做好“原始积累”。“题眼”往往是题目或材料中的主题句或者关键词。

如辨析“按劳分配比按生产要素分配更重要”。此题的“题眼”在于“按劳分配”和“按生产要素分配”,这使得我们联想到与之相关的知识内容——我国的分配制度。要答好此题,首先就要说清楚我国现阶段的分配制度的基本内容,即我国实行按劳分配为主体、多种分配方式并存的分配制度,把按劳分配和按生产要素分配结合起来,坚持效率优先、兼顾公平的原则。

2. 析题。即要分析题目讲了哪几层意思,分析材料,分清层次,概括层意,以确定

点评 将至少三点到直线距离的要求,转化为圆心到直线距离的不等关系,进而将 a, b 的不等式转化为对斜率范围的求解。此题也涉及直线的斜率和倾斜角这一常见的考点。此外,此题的解答还可以通过作图,采用数形结合的方法来求解。

六、最大(小)值问题

例 6 (2004 全国卷 III) 设 P 为圆 $x^2+y^2=1$ 上的动点,则点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值为_____。

解析 设点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, 则点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离为 $d = \frac{|3\cos\theta - 4\sin\theta - 10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|5\sin(\theta+\varphi) - 10|}{5}$ 。

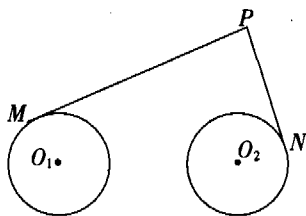
由 $\sin(\theta+\varphi) \in [-1, 1]$, 得 $d \in [1, 3]$ 。

故点 P 到直线 $3x-4y-10=0$ 的距离的最小值为 1。

点评 通过参数法,将几何问题转化为三角值域来解决。此外,也可设切线 $3x-4y+C=0$, 由 $d=r$ 求出 C , 最后由两平行线间距离公式 $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 求出最小值。

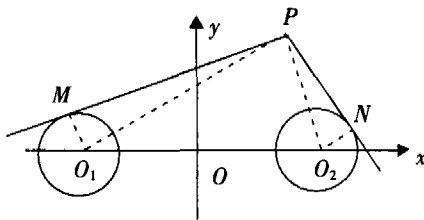
七、轨迹问题

例 7 (2005 江苏卷) 如图,圆 O_1 与圆 O_2 的半径都是 1, $O_1O_2=4$, 过动点 P 分别作圆 O_1 、圆 O_2 的切线 PM 、 PN (M, N 分别为切点), 使得 $PM = \sqrt{2}PN$ 。试建立适当的坐标系, 并求动点 P 的轨迹方程。



解析 如下图,以直线 O_1O_2 为 x 轴,线段 O_1O_2 的垂

直平分线为 y 轴,建立平面直角坐标系,则两圆心分别为 $O_1(-2, 0)$ 、 $O_2(2, 0)$ 。



设 $P(x, y)$, 则 $PM^2 = O_1P^2 - O_1M^2 = (x+2)^2 + y^2 - 1$, 同理 $PN^2 = (x-2)^2 + y^2 - 1$ 。

$\therefore PM = \sqrt{2}PN$,

$\therefore (x+2)^2 + y^2 - 1 = 2[(x-2)^2 + y^2 - 1]$,

即 $x^2 - 12x + y^2 + 3 = 0$, 整理为 $(x-6)^2 + y^2 = 33$ 。

故动点 P 的轨迹方程为 $(x-6)^2 + y^2 = 33$ 。

点评 抓住动点所满足的几何条件,直接根据几何性质,用坐标法可得到所求的轨迹方程。求解轨迹问题的五个步骤,可以概括为:建系设点→写条件→列方程→化简→说明。在实际求解过程中,步骤可以灵活变通。常用的一些方法有直接法、定义法、几何法、转移法、参数法、交轨法等。

总之,直线与圆的各种位置关系的研究,是历届高考常涉及的重要内容,特别是相切问题。同学们要掌握直线与圆的各种方程、几何性质,要熟记一些常用公式(点线距离公式 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, 斜率公式 $k = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ 等)。在解决直线与圆综合问题的过程中,要多运用数形结合、函数与方程、等价转化、分类讨论等数学思想方法。

责任编辑 赖庆安