纵览各市模拟卷 剖析高考客观题

■中山　高建彪

在高考中，数学客观题的题量较多，占分比例也较大，共 70 分，可见其在高考中的重要性. 客观题小巧灵活，短小精悍，所考查的知识覆盖面广，解法多种多样. 由于客观题不必写出解题过程，因而能否迅速、准确、全面、简捷地解答好客观题，就成为高考成败的关键一环. 本文笔者结合广东省一些地区的高考模拟卷的客观题加以分析，以期同学们能更好地掌握高考中解答客观题的几种常用方法.

一、直接法

从题设的已知条件出发，直接运用数学定理、定义、法则、公式等，通过正确的运算或推理，直接进行求解，这种方法称为直接法. 在运用直接法解题时，要具备一定的综合能力，将已知条件与所学的数学知识结合起来，选择适当的途径完成解答.

例 1（佛山市 2007 年高三质检/文）若函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2$ 的一个正数零点附近的函数值用二分法计算，其参考数据如下：

$f(1)=-2$	$f(1.5)=0.625$	$f(1.25)=-0.984$
$f(1.375)=-0.260$	$f(1.4375)=0.162$	$f(1.40625)=-0.054$

那么方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根（精确到 0.1）为（　）.

A. 1.2　　B. 1.3　　C. 1.4　　D. 1.5

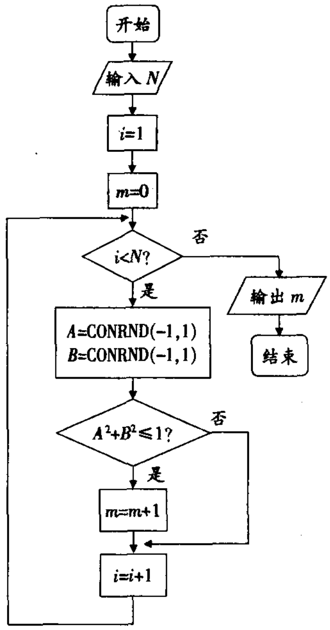
解析 直接运用函数零点存在性定理及二分法思想，在区间 $[1, 1.5]$ 上进行研究.

易知函数 $f(x)=x^3+x^2-2x-2=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续的，根据表中数据，可知 $f(1.4375)\cdot f(1.40625)<0$，得到函数 $f(x)$ 在区间 $(1.4375, 1.40625)$ 内有零点.

故方程 $x^3+x^2-2x-2=0$ 的一个近似根为 1.4，答案选 C.

点评 函数零点存在性定理为"若函数 $y=f(x)$ 的零点在区间 $[a, b]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有零点". 二分法正是利用这一重要的性质定理，逐步将零点所在区间折分，逼近得到方程的近似解. 二分法属课标新增内容，既有无限逼近的极限思想，也融合了数形结合思想.

例 2（中山市 2007 年高三质检/理）下列程序框图可用来估计 π 的值（假设函数 CONRND(-1,1) 是产生随机数的函数，它能随机产生区间 $(-1,1)$ 内的任何一个实数）. 如果输入 1000，输出的结果为 788，则由此可估计 π 的近似值为________.（保留四位有效数字）



解析 先分析清楚框图的功能，它就是利用计算机模拟的方法估算 π 值，然后根据输入数据及输出结果，直接由几何概型的概率公式进行计算.

分析框图，其功能是利用随机模拟的方法来估算 π 值，先得到两组在 $(-1, 1)$ 之间的均匀随机数，如果满足平方和不超过 1，即落在矩形（$x=\pm1$，$y=\pm1$ 所围成部分）的内切圆内，则计数变量变为 $m+1$.

由结果可得 $\frac{\pi}{4}=\frac{788}{1000}$，所以 $\pi\approx3.152$.

点评 此题属设计新颖的客观题，巧妙地结合了程序框图和几何概型，把课标新增的两个内容同时考查，具有一定的综合性. 解答时，既需要分析清楚程序框图的功能，也需要掌握采用随机模拟估算圆周率的方法.

二、化归法

化归法就是从题目已知条件出发，把复杂的、生疏的、抽象的、困难的或未知的问题，通过等价转化的手段，化为简单的、熟悉的、具体的、容易的或已知的问题的方法. 常见的化归途径有：不等式求解的等价变形、立几问题平面化、换元法、三角变换等.

例 3（惠州市 2007 年高三第二次调研/文）$\vec{a}=(\cos2\alpha, \sin\alpha)$，$\vec{b}=(1, 2\sin\alpha-1)$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2}, \pi)$，若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{2}{5}$，则 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$（　　）.

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析 从$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{2}{5}$着手，并结合数量积公式及三角公式，进行一系列的三角变换.

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\cos2\alpha+\sin\alpha(2\sin\alpha-1)=1-2\sin^2\alpha+\sin\alpha(2\sin\alpha-1)=1-\sin\alpha=\frac{2}{5}$，$\therefore \sin\alpha=\frac{3}{5}$.

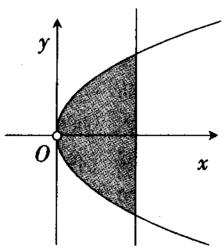
又$\because \alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$\therefore \tan\alpha=-\frac{3}{4}$.

故$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=\frac{1}{7}$，答案选 C.

点评 高考卷中常有考查三角与向量交汇的客观题或主观题，一般是以向量运算作为联系纽带，只需紧抓向量运算，依托各种三角变换，逐步实施化归.

例 4 （深圳市 2007 年三校联考/理）由抛物线$y^2=x$和直线$x=1$所围成图形的面积为________.

解析 先画出两个函数的图像（如右图），由抛物线的对称性，将所围图形面积转化为x轴上方阴影区域的 2 倍；再结合定积分的几何意义，将上方阴影部分面积的计算转化为定积分的计算.



解方程组$\begin{cases}y^2=x,\\x=1,\end{cases}$得到直线$x=1$与抛物线$y^2=x$在第一象限的交点为$(1,1)$.

结合图形,可得所求阴影部分的面积为$S=2\int_0^1\sqrt{x}\,dx=2\times(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}})|_0^1=2\times(\frac{2}{3}-0)=\frac{4}{3}$.

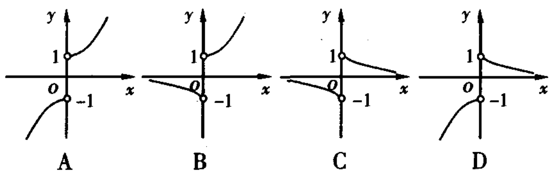
所以，抛物线$y^2=x$和直线$x=1$所围成图形的面积为$\frac{4}{3}$.

点评 定积分$\int_a^b f(x)dx$的几何意义是表示由直线$x=a,x=b(a\neq b),y=0$和曲线$y=f(x)$所围成的曲边梯形的面积，注意需满足条件“在(a,b)上，$f(x)>0$”.由此几何意义，一些曲边图形的面积可化归为定积分的计算，体现了定积分计算手段的优越性.

三、特例法

特例法是最简捷的解题方法之一，主要研究题目中一般现象的特殊情况，发现所存在的一般规律.它常常是运用满足题设条件的某些特殊值、特殊位置、特殊关系、特殊图形或特殊函数，通过分析、推理、计算或判断来解决问题.例如，在解答选择题时，可运用题中的特征，采用简捷有效的手段（如取特殊值，找特殊点，选特殊位置等），对各选择支进行筛选，排除假支，选出真支.注意在利用特例法迅速解决问题时，也可考虑常规方法来检验自己的答案，提高解决数学问题的能力.

例 5 （韶关市 2007 年高三模拟/理）函数$y=\frac{xa^x}{|x|}(0<a<1)$的图像的大致形状是（　　）.



解析 常规方法是将$y=\frac{xa^x}{|x|}$用分段函数$y=\begin{cases}a^x,x>0\\-a^x,x<0\end{cases}$来表示，由$0<a<1$及指数函数图像与性质，易得出正确选项.如果取特殊值$x=\pm1$，易可逐步排除假支，得出正确选项.

根据$y=\frac{xa^x}{|x|}$（$0<a<1$），可知：

当$x=1$时，$y=a$，即函数图像过点$(1,a)$，由$0<a<1$，可排除 A、B 两选项；

当$x=-1$时，$y=-a$，即函数图像过点（$1,-a$），由$0<a<1$，可排除 D 选项.

所以，选 C.

点评 此题有多种途径可以解决，除了分析中所提到的常规方法及解答中的特例法，还可结合函数的奇偶性进行研究.函数是高中数学的主线，我们可以通过分析函数解析式的特征，结合函数的图像，运用函数的性质进行研究，解决与函数知识相关的客观题.

例 6 （惠州市 2007 年高三调研/理）关于二项式$(x-1)^{2006}$，有下列三个命题：①该二项式展开式中非常数项的系数和是-1；②该二项式展开式中第 10 项是$C_{2006}^{10}x^{1996}$；③当$x=2006$时，$(x-1)^{2006}$除以 2006 的余数是 1.

其中正确命题的序号是____________（把你认为正确的序号都填上）

解析 根据二项展开式的特点，结合系数性质，运用取特值的方法进行研究.

设$(x-1)^{2006}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2006}x^{2006}$，

当$x=1$时，得到所有系数和为$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2006}=(1-1)^{2006}=0$；

当$x=0$时，得到常数项$a_0=(0-1)^{2006}=1$.

所以，非常数项的系数和是$a_1+a_2+\cdots+a_{2006}=-1$，命题①正确.

该二项展开式第 10 项为$T_{10}=T_{9+1}=C_{2006}^{9}x^{1997}(-1)^9=-C_{2006}^{9}x^{1997}$，所以命题②错误.

当$x=2006$时，$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2006}x^{2006}$能被 2006 整除，所以余数是$a_0=1$，所以命题③正确.

综上所述，正确命题的序号依次是：①、③.

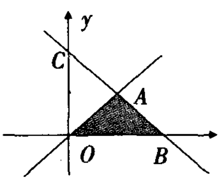
点评 以命题正误判断的形式，综合考查了二项展开式的相关知识.在研究关于二项展开式$(a+b)^n$系数的一些问题时，常常利用a、b的特殊值来解决问题.其中，第$r+1$项表示为$T_{r+1}=C_n^r a^{n-r} b^r$.

四、图解法

图解法就是借助于图形进行直观分析，并辅之以简单的推理、计算，得出正确结论，其实质就是数形结合思想方法的运用.运用此法解答问题时，需要由数的形式联想到数的几何意义，从而以形辅数解决问题，或者把形转化为数来研究.图解法在研究函数与方程、线性规划、解析几何等问题中，有着它独有的简捷性.每年高考均有很多客观题，可用数形结合思想来解决.

例7 （茂名市2007年高三模拟/文）在设x、y满足条件$\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y\leqslant x,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$则$z=x^2+y^2-2y+1$的最小值是______.

解析 作出x、y满足条件$\begin{cases}x+y\leqslant 1,\\ y\leqslant x,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$所表示的平面区域，见右下图$\triangle OAB$（含边界）.



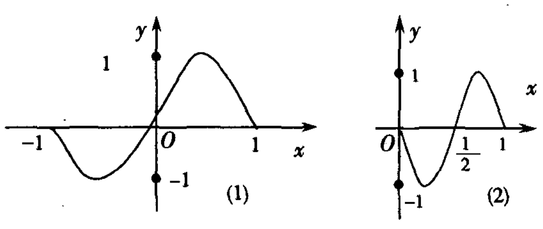
根据$z=x^2+y^2-2y+1=x^2+(y-1)^2$,可知$z$表示平面区域内的点到点$C(0,1)$的距离的平方，结合图形易知，$z$的最小值就是线段$CA$长度的平方.

解方程组$\begin{cases}x+y=1,\\ y=x,\end{cases}$得点$A$的坐标为$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

所以z的最小值为:$z=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2}-1)^2=\frac{1}{2}$.

点评 根据题设条件的几何意义，画出问题的辅助图形，借助图形的直观性，通过对图形的分析判断，得出正确结论.此题是图解法的典型代表，在约束条件与目标函数两处都体现了图解法的直观性.

例8（中山市2007年高三质检）已知函数$f(x)=\sin\pi x$的图像的一部分如图(1)，则图(2)的函数图像所对应的函数解析式可以为（　）.



A. $y=f(2x-\frac{1}{2})$　　B. $y=f(2x-1)$

C. $y=f(\frac{x}{2}-1)$　　D. $y=f(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})$

解析 观察图(1)与图(2),可知图(2)是将图(1)中的图像向右平移1个单位,再将所有点的横坐标都缩小为原来的$\frac{1}{2}$.由三角函数图像的变换,将函数$f(x)=\sin\pi x$的图像向右平移1个单位,得到函数$f(x)=\sin\pi(x-1)$的图像,再将所有点的横坐标都缩小为原来的$\frac{1}{2}$,得到函数$f(x)=\sin\pi(2x-1)$的图像.正确答案为B.

点评 以上三角函数图像的变换，可以将结论推广到一般情况,即研究函数$f(ax+b)+c$的图像如何由函数$f(x)$的图像变换得到.在研究这类图像变换问题时，要注意左右平移、上下伸缩的顺序，这将对变换结果有所影响.

五、探索法

创新思维能力的考查，在近几年的高考中逐步有所加强，常以开放性问题、新颖情景等模式呈现，解决这类问题的主要手段就是探索，一般是探索所给结论成立的一些条件，或者探索一些结论的构成形式，伴以试验、归纳、猜想、探索或证明等思维过程.

例9 （佛山市2007年高三质检/理）考察下列一组不等式：$2^3+5^3>2^2\cdot 5+2\cdot 5^2$,$2^4+5^4>2^3\cdot 5+2\cdot 5^3$,$2^5+5^5>2^3\cdot 5^2+2^2\cdot 5^3$,….

将上述不等式在左右两端仍为两项和的情况下加以推广，使以上的不等式成为推广不等式的特例，则推广的不等式可以是______________.

解析 挖掘所已知三个不等式的结构特征，分析指数的关系，易将结论逐步推广.

推广的不等式为：$2^{m+n}+5^{m+n}>2^m5^n+2^n5^m$（$m,n$是正整数）.

进一步可以推广为：$a^{m+n}+b^{m+n}>a^mb^n+a^nb^m$ $(a,b>0, a\neq b,m,n>0)$.

点评 此题属归纳推理，即由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征，它是由个别事实概括出一般结论的推理.

例10 （茂名市2007年高三模拟/文）若三角形的内切圆半径为r，三边的长分别为a，b，c，则三角形的面积$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$,根据类比思想,若四面体的内切球半径为R，四个面的面积分别为S_1,S_2,S_3,S_4，则此四面体的体积$V=$________.

解析 抓住类比途径，平面→空间，线段→面，面积→体积，从元素与方法上展开.设四面体内切球的球心为O，则球心O到四个面S_1,S_2,S_3,S_4的距离都是R，所以四面体的体积等于以O为顶点，分别以S_1,S_2,S_3,S_4为底面的四个三棱锥体积的和.

所以,$V=\frac{1}{2}R(S_1+S_2+S_3+S_4)$.

点评 此题属类比推理.类比是由两类对象的某

些相同或相似的性质，推断它们在其他性质上也有可能相同或相似的一种推理形式.类比与归纳都属合情推理，都是一种主观的、不充分的、合乎情理的推理，要确认其结论的正确性，必须经过严格的论证.一些新的结论或者解决问题的思路，常常是通过类比、归纳等推理手段得到.高考中也把这种类比与归纳的推理思维能力的考查作为命题的热点之一.在数学高考中，所涉及的客观题一般是容易题或中档题，个别题属于较难题，其中大部分题都可用快速的方法解答.我们在解答高考卷中的客观题时，要熟练运用各种基本题型的一般解法，分析已知条件与问题，正确进行等价转化或挖掘题目的特点，寻找适当的解答方法，特别是对特例法、图解法等常用解法与技巧的运用.

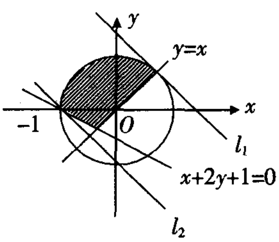
此文中所涉及的客观题都比较新颖，为了检验同学们阅读此文之后的效果，收录如下模拟题供同学们练习.

练 1（茂名市 2007 年高三模拟）在约束条件 $\begin{cases} y\geq x \\ x+2y+1\geq 0 \\ x^2+y^2\leq 1 \end{cases}$ 下，目标函数$z=x+y$的取值范围是（　）.

A. $[-1,\ 1]$　　B. $[-\frac{2}{3},\ 1]$

C. $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　D. $[-1,\sqrt{2}]$

解：作出可行域如右图，当直线 $y=-x+z$ 位于 l_1 和 l_2 之间时，分别使目标函数取得最大值和最小值，所以选 D 项.



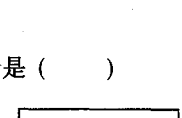
练 2（惠州市 2007 年高三第二次调研）设全集 U 是实数集 $\mathbf{R}$，$M=\{x|x^2>4\}$，$N=\{x|1<x<3\}$，则图中阴影部分所表示的集合是（　　）

A. $\{x|-2\leq x<1\}$

B. $\{x|-2\leq x\leq 2\}$

C. $\{x|1<x\leq 2\}$

D. $\{x|x<2\}$



解：图中阴影部分所表示的集合是$N\cap(\complement_U M)$，经计算得到$N\cap(\complement_U M)=\{x|1<x\leq 2\}$，答案为 C.

练 3（韶关市 2007 年高三模拟）在$\triangle ABC$中，若$AB\perp AC$，$AC=b$，$BC=a$，则$\triangle ABC$的外接圆半径$r=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$，将此结论拓展到空间，可得出的正确结论是：在四面体$S\text{-}ABC$中，若SA、SB、SC两两垂直，$SA=a$，$SB=b$，$SC=c$，则四面体$S\text{-}ABC$外接球半径$R=$__________.

答案：$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

练 4（佛山市 2007 年高三质检）如果实数$a,b\in R^+$，且$a>b$，那么b、$\sqrt{ab}$和$\frac{1}{2}(a+b)$由大到小的顺序是________.

答案：$b<\sqrt{ab}<\frac{1}{2}(a+b)$

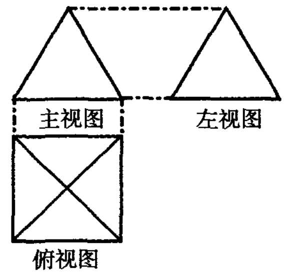
练 5（佛山市 2007 年高三质检）如图，一个简单空间几何体的三视图其主视图与左视图是边长为 2 的正三角形，俯视图轮廓为正方形，则其体积是（　）.

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

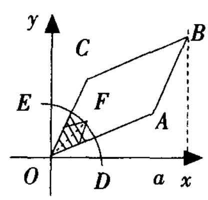
D. $\frac{8}{3}$

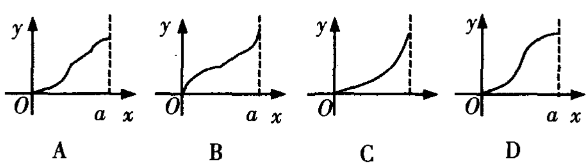


解：根据三视图，易知几何体为正四棱锥，其底面边长为 2，侧面等腰三角形的高为 2.

由此可得，正四棱锥的高为 $h=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，其体积为 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times 2^2\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 答案为 B.

练 6（佛山市 2007 年高三质检）如图，圆弧型声波DFE从坐标原点O向外传播.若D是DFE弧与x轴的交点，设$OD=x(0\leq x\leq a)$，圆弧型声波DFE在传播过程中扫过平行四边形$OABC$的面积为y（图中阴影部分），则函数$y=f(x)$的图像大致是（　）.





解：设$\angle AOC$的弧度数为θ.

当$0\leq x\leq OC$时，$f(x)=\frac{1}{2}\theta x^2$，面积递增的速度越来越快，图像表现为向下凸出；当$OC<x\leq OA$时，面积递增的速度均匀，图像表现为一条线段；当$OA<x\leq OB$时，面积递增的速度越来越慢，图像表现为向上凸出.正确选项为 A.

责任编校　赖庆安