透过2007年高考看应用建模经典处

■中山 高建彪

近几年的高考，越来越重视对应用建模能力的考查，一般以贴近生活的实际问题为背景，考查高中阶段重要的数学模型. 解答时，考生要先过读题关，在阅读材料、理解题意的基础上，从实际问题中抽象出数学问题，通过建模关之后，再利用数学模型进行分析与研究，顺利通过求解关，最后验证所得数学结论是否符合实际问题. 一般来说，常涉及的实际问题包括优化问题、预测问题、极值问题、方程问题与测量问题等. 下面以2007年全国各地高考中的典型应用建模问题为例，剖析其中所常考查的数学模型.

一、初等函数模型

抓住实际问题中变量之间的关系，提炼出客观存在的函数关系. 一般所涉及的函数模型有：二次函数、指数函数、对数函数、幂函数等.

例1 (2007年上海卷/文理18) 近年来，太阳能技术运用的步伐日益加快.2002年全球太阳电池的年生产量达到670兆瓦，年生产量的增长率为34%.以后四年中，年生产量的增长率逐年递增2%（如2003年的年生产量的增长率为36%）.

(1)求2006年全球太阳电池的年生产量（结果精确到0.1兆瓦）；

(2)目前太阳电池产业存在的主要问题是市场安装量远小于生产量，2006年的实际安装量为1420兆瓦.假设以后若干年内太阳电池的年生产量的增长率保持在42%，到2010年，要使年安装量与年生产量基本持平（即年安装量不少于年生产量的95%），这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到多少（结果精确到0.1%)?

解 (1)由已知得2003、2004、2005、2006年太阳电池的年生产量的增长率依次为36%、38%、40%、42%，则2006年全球太阳电池的年生产量为$670\times1.36\times1.38\times1.40\times1.42\approx2499.8$(兆瓦).

(2)设太阳电池的年安装量的平均增长率为x，则$\frac{1420(1+x)^4}{2499.8(1+42\%)^4}\geqslant95\%$，解得$x\geqslant0.615$.

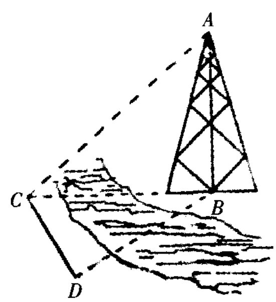
因此，这四年中太阳电池的年安装量的平均增长率至少应达到61.5%.

点评 以工业生产为背景，通过与增长率的相关计算解决实际问题. 平均增长率问题，可用公式表示，表现为指数函数模型的运用. 此题文字关突破尤其重要，回顾历年上海高考数学，应用建模问题背景新颖，文字颇多，体现了对阅读理解的高要求.

二、解三角形模型

在天文、航海、地理和军事等方面，经常会出现一些与解三角形有关的测量问题. 高考中常以这些生产生活实际问题为背景，检阅正弦定理、余弦定理两大工具的光芒.

例2 (2007年海南、宁夏卷/文理17) 如图，测量河对岸的塔高AB时，可以选与塔底B在同一水平面内的两个测点C与D.现测得$\angle BCD=\alpha$，$\angle BDC=\beta$，$CD=s$，并在点C测得塔顶A的仰角为θ，求塔高AB.



解 在中$\triangle BCD$中，$\angle CBD=\pi-\alpha-\beta$.

由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$.

所以$\frac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\frac{s\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

在Rt$\triangle ABC$中，$AB=BC\tan\angle ACB=\frac{s\cdot\tan\theta\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

点评 应用问题多以具体的数值运算来完成建模求解，此题打破常规，研究用字母表示结果的具体测量，体现了解决问题的一般思路. 解题时需明确哪些是已知量，哪些是未知量，然后选择恰当的三角形及解题工具来求解.

三、导数优化模型

生活中有一些“用料最省”“利润最大”“效率最高”的优化问题，一般是先建立函数模型，然后研究函数的最大（小）值. 导数作为研究函数性质的重

要工具，可以较好地解决这类优化问题.

例3 （2007年湖北卷/文18）某商品每件成本9元，售价为30元，每星期卖出432件；如果降低价格，销售量可以增加，且每星期多卖出的商品件数与商品单价的降低值x（$0\leqslant x\leqslant 30$，单位：元）的平方成正比，已知商品单价降低2元时，一星期多卖出24件.

(1)将一个星期的商品销售利润表示成x的函数；

(2)如何定价才能使一个星期的商品销售利润最大?

解 (1)设商品降价x元，则多卖的商品数为kx^2，若记商品在一个星期的获利为$f(x)$，则依题意有$f(x)=(30-x-9)(432+kx^2)=(21-x)(432+kx^2)$.

又由已知条件有$24=k\cdot 2^2$，解得$k=6$.

所以$f(x)=-6x^3+126x^2-432x+9072$，$x\in[0,30]$.

(2)由$f'(x)=-18x^2+252x-432=-18(x-2)(x-12)$，

令$f'(x)=0$，解得$x=2$或$x=12$.

x、$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表：

x	$[0,2)$	2	$(2,12)$	12	$(12,30]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	极小	↗	极大	↘

故当$x=12$时，$f(x)$取极大值. 因为$f(0)=9072$，$f(12)=11264$，所以定价为$30-12=18$元能使一个星期的商品销售利润最大.

点评 抓住题中数量关系，建立函数模型，然后利用导数研究函数.求解此类优化问题，需走好三步：①建立函数关系；②求极值点，确定最大（小）值；③回归优化方案.

四、线性规划模型

在金融投资、生产安排、人力调配、资源利用等方面，有两类问题较为普遍，一是在资源有限的条件下，如何使用它们来完成最多的任务；二是给定一项任务，如何统筹安排，以最少的资源来完成该项任务. 求解此类问题时，常用线性规划模型来解决.

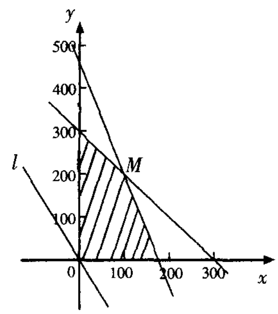
例4 (2007年山东卷/文19)本公司计划2008年在甲、乙两个电视台做总时间不超过300分钟的广告，广告总费用不超过9万元，甲、乙电视台的广告收费标准分别为500元/分钟和200元/分钟，规定甲、乙两个电视台为该公司所做的每分钟广告，能给公司事来的收益分别为0.3万元和0.2万元.问该公司如何分配在甲、乙两个电视台的广告时间，才能使公司的收益最大，最大收益是多少万元?

解 设公司在甲电视台和乙电视台做广告的时间分别为x分钟和y分钟，总收益为z元，目标函数为$z=3000x+2000y$.

由题意得$\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\500x+200y\leqslant 90000,\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$

即$\begin{cases}x+y\leqslant 300,\\5x+2y\leqslant 900,\\x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.\end{cases}$

作出二元一次不等式组所表示的平面区域，即作出可行域.



如右图，作直线l：$3000x+2000y=0$，即$3x+2y=0$.平移直线l，从图中可知，当直线l过点M时，目标函数取得最大值.

联立$\begin{cases}x+y=300,\\5x+2y=900,\end{cases}$ 解得$x=100$，$y=200$，

即M（100，200）.

$\therefore z_{\max}=3000x+2000y=700000$（元）.

所以，该公司在甲电视台做100分钟广告，在乙电视台做200分钟广告，公司的收益最大，最大收益是70万元.

点评 关于线性规划问题，首先要根据实际问题列出表达约束条件的不等式，然后分析目标函数中所求量的几何意义，其中两次运用数形结合思想来求解，一是由约束条件准确地描画可行域；二是将目标函数变形，直观地利用图形求得满足题设的最优解.

五、概率模型

近年的各地高考数学，都十分重视对分布列与期望的考查，今年就有近三分之一的试卷都出现了关于概率模型的求解.

例5 （2007年湖南卷/理17）某地区为下岗人员免费提供财会和计算机培训，以提高下岗人员的再就业能力，每名下岗人员可以选择参加一项培训、参加两项培训或不参加培训，已知参加过财会培训的有60%，参加过计算机培训的有75%，假设每个人对培训项目的选择是相互独立的，且各人的选择相互之间没有影响.

(1) 任选1名下岗人员，求该人参加过培训的概率；

(2) 任选3名下岗人员，记为3人中参加过培训

的人数，求的分布列和期望.

解 任选 1 名下岗人员，记“该人参加过财会培训”为事件 A，“该人参加过计算机培训”为事件 B，由题设知，事件 A 与事件 B 相互独立，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.75$.

（1）任选 1 名下岗人员，该人没有参加过培训的概率是 $P_1=P(\bar{A}\cdot\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.4\times0.25=0.1$，故该人参加过培训的概率是 $P_2=1-P_1=1-0.1=0.9$.

（2）因为每个人的选择是相互独立的，所以 3 人中参加过培训的人数 ξ 服从二项分布 B（3，0.9），$P(\xi=k)=C_3^k\times0.9^k\times0.1^{3-k}$，$k=0$，1，2，3，即 ξ 的分布列如下表：

ξ	0	1	2	3
P	0.001	0.027	0.243	0.729

ξ 的期望是 $E\xi=1\times0.027+2\times0.243+3\times0.729=2.7$.（或 $E\xi=3\times0.9=2.7$）

点评 抓住事件的相关关系，由概率计算公式可轻松求解第一个问题. 研究离散型随机变量的分布列，第一步是分析出随机变量 ξ 的可能取值；第二步是求出 ξ 各种取值时的概率；第三步是列出表格，即写出分布列，再在分布列的基础上，按公式求期望 $E\xi$. 第二个问题属概率中的二项分布问题，关键是正确区分及熟练运用公式.

六、统计模型

统计在 21 世纪信息时代具有重要的地位. 工农业生产生活中，经常需要各种数据，一般是通过统计抽样的方法，得到一个高质量的样本，从样本中提取一些基本信息，如样本分布、样本数字等特征，用样本来推断总体的情况. 由于信息社会的需要，近几年的高考也逐渐加大了对统计分析的考查力度.

例 6（2007 年湖北卷/理 17）在生产过程中，测得纤维产品的纤度（表示纤维粗细的一种量）共有 100 个数据，将数据分组如右表：

分组	频数
[1.30，1.34)	4
[1.34，1.38)	25
[1.38，1.42)	30
[1.42，1.46)	29
[1.46，1.50)	10
[1.50，1.54)	2
合计	100

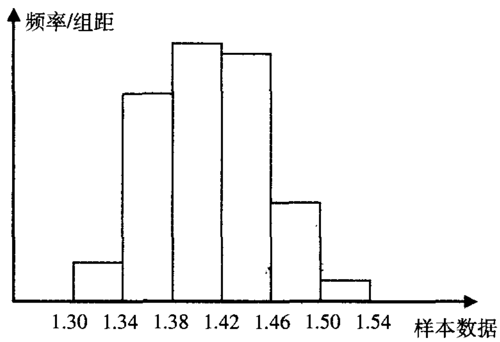
（1）在答题卡上完成频率分布表，并在给定的坐标系中画出频率分布直方图；

（2）估计纤度落在 [1.38，1.50) 中的概率及纤度小于 1.40 的概率是多少？

（3）统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值(例如区间 [1.30，1.34) 的中点值是 1.32) 作为代表. 据此，估计纤度的期望.

解（1）

分组	频数	频率
[1.30，1.34)	4	0.04
[1.34，1.38)	25	0.25
[1.38，1.42)	30	0.30
[1.42，1.46)	29	0.29
[1.46，1.50)	10	0.10
[1.50，1.54)	2	0.02
合计	100	1.00



（2）纤度落在 [1.38,1.50) 中的概率约为 $0.30+0.29+0.10=0.69$，纤度小于 1.40 的概率约为 $0.04+0.25+\frac{1}{2}\times0.30=0.44$.

（3）总体数据的期望约为 $1.32\times0.04+1.36\times0.25+1.40\times0.30+1.44\times0.29+1.48\times0.10+1.52\times0.02=1.4088$.

点评 频率分布直方图由“求极差→决定组距与组数→将数据分组→列频率分布表→画频率分布直方图”五步得到，图中各长方形的面积可以形象地表示频率，各长方形的总面积和为 1. 题中又由频率来估算概率，并估算总体平均数，公式：$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}x_ip_i$，其中 n 为样本数，N 为组数，x_i 为组中值，p_i 为相应频数；若设频率 $f_i=\frac{p_i}{n}$，则公式也可变形为 $\bar{x}=\sum_{i=1}^{N}x_if_i$，此计算公式与概率中期望的计算公式相符.

责任编校 赖庆安