

剖析导数在高考中的考查热点

■中山 高建彪

微积分是近代数学最伟大的成就,中学阶段把微积分最核心的导数内容,列为学习与考试的要求.由于导数是研究函数性质的重要工具,又有着丰富的实际背景和广泛的应用,导数也自然成为了历届高考考查的热门之一.纵观 2007 年全国各地 37 份文理卷,有近三分之二的试卷既出现了考查导数基础知识的客观题,又有考查导数综合运用的解答题.在客观题中,试题主要涉及导数的计算、求曲线的切线、函数的单调区间与函数的极值等知识点的简单运用;在解答题中,试题更体现了对导数综合运用较高的能力要求.下面结合 2007 年高考数学中的解答题,谈谈导数考查时的几类主要题型.

一、研究函数性质

导数作为研究函数问题的利刃,常用来解决极值、最大(小)值、单调性等三类问题.在求解这些函数问题时,要结合导数的思想与理解性质的基础上,掌握用导数方法求解的一般步骤,列表归纳如下:

	相关性质	用导数方法求解的基本步骤
单调性	在某个区间 (a, b) 内,若 $f'(x) > 0$,则 $f(x)$ 在这个区间内单调递增;若 $f'(x) < 0$,则 $f(x)$ 在这个区间内单调递减.	① 求 $f'(x)$; ② 解 $f'(x) > 0$,得到增区间;解 $f'(x) < 0$ 得到减区间.
极值	设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义,且若对 x_0 附近所有的点都有 $f(x) < f(x_0)$ (或 $f(x) > f(x_0)$),则称 $f(x_0)$ 为函数的一个极大(小)值,称 x_0 为极大(小)值点.	① 求 $f'(x)$; ② 解方程 $f'(x) = 0$; ③ 检查 $f'(x)$ 在方程根左右的值的符号,若左正右负,则取极大值;如果左负右正,则取极小值;如果左右同号,则不取极值.
最值	若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增,则 $f(a)$ 为最小值, $f(b)$ 为最大值;若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减,则 $f(a)$ 最大, $f(b)$ 最小.	① 求 $y=f(x)$ 在 (a, b) 内的极值; ② 将 $y=f(x)$ 在各极值点的极值与 $f(a)$ 、 $f(b)$ 比较,其中最大的一个为最大值,最小的一个为最小值.

在熟练运用导数工具研究函数的性质同时,我们

要注意比较研究函数的导数方法与初等方法,体会导数方法在研究函数性质中的一般性和有效性.

例 1 (2007 年海南卷/文 19) 设函数 $f(x) = \ln(2x+3) + x^2$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ 的最大值和最小值.

解析 根据题意,易求得 $f(x)$ 的定义域为

$(-\frac{3}{2}, +\infty)$.

$$(1) f'(x) = \frac{2}{2x+3} + 2x = \frac{4x^2 + 6x + 2}{2x+3} = \frac{2(2x+1)(x+1)}{2x+3}.$$

当 $-\frac{3}{2} < x < -1$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $-1 < x < -\frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$. 由此可知, $f(x)$ 分别在区间 $(-\frac{3}{2}, -1)$, $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调增加,在区间 $(-1, -\frac{1}{2})$ 单调减少.

(2) 由(1)知 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ 的最小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \ln 2 + \frac{1}{4}$;

$$\begin{aligned} & \text{又 } f(-\frac{3}{4}) - f(\frac{1}{4}) = \ln \frac{3}{2} + \frac{9}{16} - \ln \frac{7}{2} - \frac{1}{16} = \ln \frac{3}{7} + \\ & \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \ln \frac{49}{6}) < 0. \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}]$ 的最大值为 $f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{16} + \ln \frac{7}{2}$.

点评 此题若用初等方法求函数 $f(x)$ 的单调区间,则十分困难,而采用导数方法来研究,通过“求导→解不等式→写单调区间”这三步,即可简捷地完成解答.一般来说,用导数方法求函数 $f(x)$ 的最大(小)值,先求函数的导数 $f'(x)$,再解 $f'(x) = 0$ 得到极值点,最后列表分析得出结论.此题的解法,省了列表的繁琐,直接依据单调性分析极值点的归属,并结合区间端点值的比较而进行求解.

二、证明不等式成立

证明不等式的方法有许多,导数作为研究一些不等式恒成立问题的工具,体现了导数应用上的新颖性

以及导数思想的重要性. 由导数方法研究不等式时, 一般是先构造一个函数, 借助对函数单调性或最大(小)值的研究, 经历某些代数变形, 得到待证明的不等式.

例 2 (2007 年安徽卷/理 18) 设 $a \geq 0$, $f(x) = x - 1 - \ln^2 x + 2a \ln x (x > 0)$.

(1) 令 $F(x) = xf'(x)$, 讨论 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的单调性并求极值;

(2) 求证: 当 $x > 1$ 时, 恒有 $x > \ln^2 x - 2a \ln x + 1$.

解析 (1) 根据求导法则有 $f'(x) = 1 - \frac{2 \ln x}{x} + \frac{2a}{x}$, $x > 0$, 故 $F(x) = xf'(x) = x - 2 \ln x + 2a$, $x > 0$, 于是, $F'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$, $x > 0$. 列表如下:

x	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$	极小值 $F(2)$	$\nearrow$

由上表可知, $F(x)$ 在 $(0, 2)$ 内是减函数, 在 $(2, +\infty)$ 内是增函数, 所以, 在 $x=2$ 处取得极小值 $F(x) = 2 - 2 \ln 2 + 2a$.

(2) 证明: 由 $a \geq 0$ 知, $F(x)$ 的极小值 $F(x) = 2 - 2 \ln 2 + 2a > 0$, 由上表可知, 对一切 $x \in (0, +\infty)$, 恒有 $F(x) = xf'(x) > 0$.

从而, 当 $x > 0$ 时, 恒有 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增.

所以, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = 0$, 即 $x - 1 - \ln^2 x + 2a \ln x > 0$.

综上所述可知, 当 $x > 1$ 时, 恒有 $x > 1 - \ln^2 x - 2a \ln x + 1$.

点评 观察第二个问题中待证明的不等式, 易发现与函数 $f(x)$ 有着同样般的“相貌”, 结合函数思想在不等式证明中的作用, 将问题转化为研究函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性及最小值. 此道高考题主要考查了导数的概念与计算, 以及利用导数研究函数单调性、极值和证明不等式的方法, 这体现了高考中对综合运用导数知识解决问题的能力要求.

三、求解参数范围

给定含有参数的函数以及相关的函数性质, 求解参数的值或范围, 需要我们灵活运用导数这一工具, 对问题实施正确的等价转化, 列出关于参数的方程或不等式. 在此类含参问题的求解过程中, 逆向思维的作用尤其重要.

例 3 (2007 年全国 I 卷/文 20) 设函数 $f(x) = 2x^3 +$

$3ax^2 + 3bx + 8c$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 时取得极值.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若对于任意的 $x \in [0, 3]$, 都有 $f(x) < c^2$ 成立, 求 c 的取值范围.

解析 (1) $f'(x) = 6x^2 + 6ax + 3b$, 因函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 取得极值, 则有 $f'(1)=0$, $f'(2)=0$, 即有 $\begin{cases} 6+6a+3b=0, \\ 24+12a+3b=0. \end{cases}$ 解得 $a=-3$, $b=4$.

(2) 由 (1) 可知, $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 8c$, $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$.

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (2, 3)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以, 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极大值 $f(1) = 5 + 8c$; 又 $f(0) = 8c$, $f(3) = 9 + 8c$, 故当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $f(3) = 9 + 8c$.

因为对于任意的 $x \in [0, 3]$, 有 $f(x) < c^2$ 恒成立, 所以 $9 + 8c < c^2$, 解得 $c < -1$ 或 $c > 9$.

综上所述, c 的取值范围为 $(-\infty, -1) \cup (9, +\infty)$.

点评 依据导数求函数极值的理论, 将极值点转化为方程 $f'(x)=0$ 的根, 由方程思想易求得两个待定的系数. 解第二个问题的方法与前面证明不等式的思路类似, 利用导数对函数最大值进行研究, 然后将含参不等式恒成立的关系转化为关于参数的不等式, 解不等式而得到所研究参数的范围.

四、研究相切问题

导数的几何意义表现为曲线的切线斜率值, 从而利用导数可求曲线 $y=f(x)$ 的切线, 并进一步将导数融合到函数与解析几何的交汇问题中. 解决此类相切问题, 一般先求函数的导数 $y=f'(x)$, 依据曲线 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的切线斜率为 $k=y'|_{x=x_0}=f'(x)|_{x=x_0}$ 而进行研究. 由于切点具有双重身份, 既在切线上, 又在函数图像上, 从而对切点的研究可作为解决问题的纽带, 特别是在不知道具体切点的情况下, 常常设切点坐标并联立方程组而求解.

例 4 (2007 年全国 II 卷/理 22) 已知函数 $f(x) = x^3 - x$.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程;

(2) 设 $a > 0$, 如果过点 (a, b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线, 证明: $-a < b < f(a)$.

解析 (1) 求函数 $f(x)$ 的导数: $f'(x) = 3x^2 - 1$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(t, f(t))$ 处的切线方程为 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$, 即 $y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$.

(2) 如果有一条切线过点 (a, b) , 则存在 t , 使 $b = (3t^2 - 1)a - 2t^3$.

于是,若过点 (a, b) 可作曲线 $y=f(x)$ 的三条切线,则方程 $2t^3-3at^2+a+b=0$ 有三个相异的实数根.

记 $g(t)=2t^3-3at^2+a+b=0$, 则 $g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$.

当 t 变化时, $g(t), g'(t)$ 的变化情况如下表所示:

t	$(-\infty, 0)$	0	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	极大值 $a+b$	↘	极小值 $b-f(a)$	↗

由 $g(t)$ 的单调性, 当极大值 $a+b < 0$ 或极小值 $b-f(a) > 0$ 时, 方程 $g(t)=0$ 最多有一个实数根; 当 $a+b=0$ 时, 解方程 $g(t)=0$, 得 $t=0, t=\frac{3a}{2}$, 即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根; 当 $b-f(a)=0$ 时, 解方程 $g(t)=0$, 得 $t=-\frac{a}{2}, t=a$, 即方程 $g(t)=0$ 只有两个相异的实数根.

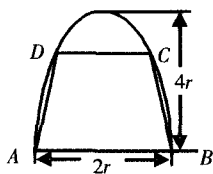
综上, 如果过 (a, b) 可作曲线 $y=f(x)$ 三条切线, 即 $g(t)=0$ 有三个相异的实数根, 则 $\begin{cases} a+b > 0, \\ b-f(a) < 0, \end{cases}$ 即 $-a < b < f(a)$.

点评 依据切线的斜率等于切点处的导数值, 易轻松完成第一个问题关于切线方程的求解; 第二个问题所涉及的三条切线, 可等价转化为方程有三个实数根的问题, 进一步利用导数对函数性质的研究, 可解决方程实数根个数的讨论.

五、解决实践问题

在工农业生产、生活等实际问题中, 常常需要研究一些成本最低、利润最大、用料最省的问题. 我们先把实际情景翻译为数学语言, 找出情景中主要的关系, 抽象出具体的数学问题, 化归为研究目标函数的最大(小)值, 从而可利用导数方法简捷求解, 此类问题称为优化问题. 解答此类问题时, 需要抓住三个基本步骤: ①建立函数关系; ②求极值点, 确定最大(小)值; ③回归优化方案.

例 5 (2007 年北京卷/理 19) 如右图, 有一块半椭圆形钢板, 其半轴长为 $2r$, 短半轴长为 r , 计划将此钢板切割成等腰梯形的形状, 下底 AB 是半椭圆的短轴, 上底 CD 的端点在椭



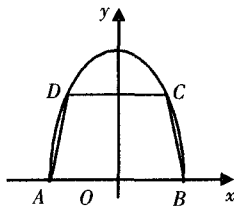
圆上, 记 $CD=2x$, 梯形面积为 S .

(1) 求面积 S 以 x 为自变量的函数式, 并写出其定义域;

(2) 求面积 S 的最大值.

解析 (1) 依题

意, 以 AB 的中点 O 为原点建立直角坐标系 $O-xy$ (如右图), 则点 C 的横坐标为 x .



由点 C 的纵坐标

y 满足方程 $\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{4r^2} = 1 (y \geq 0)$, 解得 $2\sqrt{r^2-x^2} (0 < x < r)$,

$S = \frac{1}{2} (2x+2r) \cdot 2\sqrt{r^2-x^2} = 2(x+r) \cdot \sqrt{r^2-x^2}$, 其定义域

为 $F(1)F(2) \cdots F(n) > (e^{n+1}+2)^{\frac{n}{2}}, n \in \mathbf{N}^*$.

(2) 记 $f(x)=4(x+r)^2(r^2-x^2), 0 < x < r$, 则 $f'(x) = 8(x+r)^2(r-2x)$.

令 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{1}{2}r$.

因为当 $0 < x < \frac{r}{2}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $\frac{r}{2} < x < r$ 时, $f'(x) < 0$;

所以 $f(\frac{1}{2}r)$ 是 $f(x)$ 的最大值.

因此, 当 $x=\frac{1}{2}r$ 时, S 也取得最大值, 最大值

为 $\sqrt{f(\frac{1}{2}r)} = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, 即梯形面积 S 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.

点评 解决实际问题的关键在于建立数学模型和目标函数. 此题以钢板的切割作为背景, 综合了圆锥曲线的运用. 在用导数工具来研究目标函数的最大(小)值, 也没有进行列表分析, 而是通过对单调性的分析及端点函数值的比较, 得到目标函数的最大值.

由上可知, 导数思想方法具有程序化、易掌握的显著特点, 它是一种有力的工具, 可以作为解决函数的极值、单调区间、函数在闭区间上的最大(小)值等基本方法. 导数的广泛应用为研究函数性质、函数图像开辟了新的捷径, 成为沟通函数与数列、不等式、圆锥曲线等问题的一座桥梁. 我们要意识到导数工具的重要性, 下最大的功夫进行突破, 为今后的深入学习与研究打下坚实的基础.

责任编辑 赖庆安