先猜后证，发现之魂

■高建彪

推理与证明在数学学习与发现中具有重要的地位与价值，推理包括归纳推理和类比推理这两种主要的合情推理以及演绎推理等，证明包括综合法、分析法、反证法、数学归纳法等证明方法.其中，合情推理都是对结论进行猜测，所得结论不一定正确，从而需要进行证明. 正是由于这种“先猜后证”的模式，成为了科学发现之魂，自然科学和数学研究中许多结论，都有先猜后证的影子，下面结合数学中的四例问题来仔细体会.

一、数列问题

例 1 数列 $\{a_n\}$中，已知 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n(n+1)}$ ($n\geqslant 2$，$n\in N^*$).

（1）计算 a_2，a_3，a_4 的值，并归纳猜想出数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）利用公式$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$证明你的猜想.

解析 （1）当 $n=2$ 时，$a_2=a_1+\frac{1}{2\times(2+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times(2+1)}=\frac{2}{3}$；

当 $n=3$ 时，$a_3=a_2+\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\times(3+1)}=\frac{3}{4}$；

当 $n=4$ 时，$a_4=a_3+\frac{1}{4\times(4+1)}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\times(4+1)}=\frac{4}{5}$.

由$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{4}{5}$，猜想：$a_n=\frac{n}{n+1}$.

（2）易知

$$a_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

另证 也可以用数学归纳法证明如下：

当 $n=1$ 时，易知猜测成立.

假设当 $n=k(k\in N^*)$ 时猜测成立，即 $a_k=\frac{k}{k+1}$.

当 $n=k+1$ 时，

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

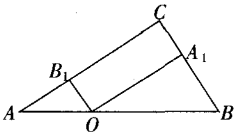
即 $n=k+1$ 时猜测成立.

综上所述，可知猜测对任何 $n\in N^*$ 都成立.

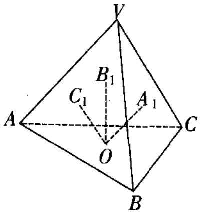
点评 由数列中的递推关系，写出若干项，观察这些项的规律，猜测出其通项公式. 要探讨猜测是否正确，必须通过证明的历程. 这种先猜后证的模式，在解决数列的递推问题中十分典型.

二、几何问题

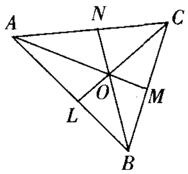
例 2 我们知道三角形有性质：过$\triangle ABC$ 的底边 AB 上任一点 O 分别作 $OA_1/\!/AC$，$OB_1/\!/BC$，分别交 BC、AC 于 A_1、B_1，则 $\frac{OA_1}{AC}+\frac{OB_1}{BC}$为定值 1. 那么能类比此结论，猜想四面体中所具有的性质吗？试证明你的猜想是否正确.



解析 猜想的结论为：过四面体 $V-ABC$ 的底面 ABC 上任一点 O 分别作 $OA_1/\!/VA$，$OB_1/\!/VB$，$OC_1/\!/VC$，A_1、B_1、C_1 分别是所作直线与侧面交点.则 $\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}$为定值 1.



下面证明如下：



如图，设平面 $OA_1VA\cap BC=M$，平面 $OB_1VB\cap AC=N$，平面 $OC_1VC\cap AB=L$，则有：

$\triangle MOA_1\backsim\triangle MAV$，$\triangle NOB_1\backsim\triangle NBV$，$\triangle LOC_1\backsim\triangle LCV$.

得$\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}=\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}$.

在底面$\triangle ABC$ 中，由于 AM、BN、CL 交于一点 O，用面积法易证得$\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}=1$. 所以$\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}$为定值 1.

点评 从三角形到四面体，存在着许多类比结论，如面积与体积等. 此题利用相似三角形性质，容易得到此例中三角形的性质：过 A、O 分别作 BC 垂线，过 B、O 分别作 AC 垂线，则用面积法也不难证明性质的定值为 1. 通过类比，得到四面体的猜想，同时在证法上也体现了类比，利用了三角形的相似及面积法研究定值.

三、三角问题

例 3 已知下列三个等式：

$\sin^2 30°+\cos^2 60°+\sin 30°\cos 60°=\frac{3}{4}$,

$\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°=\frac{3}{4}$,

$\sin^2 15°+\cos^2 45°+\sin 15°\cos 45°=\frac{3}{4}$.

观察上述等式的规律，请你写出一般性的结论，并对你的结论进行证明.

解析 一般性结论为：$\sin^2\alpha+\cos^2(\alpha+30°)+\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+30°)=\frac{3}{4}$.

证明过程如下：

$$\text{左边}=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos(2\alpha+60°)}{2}+\sin\alpha\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$$

$$=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\left(\frac{1}{2}\cos 2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha-\frac{1-\cos 2\alpha}{4})$$

$$=\frac{3}{4}.$$

∴原式得证.

点评 *此类由一组三角恒等式来观察发现其规律的问题较为经典，一般化就是根据一组已知式子，发现出存在一般规律，然后进行证明，这是数学中一种科学发现的手段，即通过类比、归纳、猜想、证明等过程得到新的数学结论. 我们要善于从解题中发现出新的问题，从身边的世界中发现出存在的科学规律.*

四、解析几何

例 4 已知动点 P 到定点 $F(1, 0)$的距离比它到直线 $x+2=0$ 的距离小 1，若记动点 P 的轨迹为曲线 C.

（1）求曲线 C 的方程.

（2）若直线 L 与曲线 C 相交于 A、B 两点，且 $OA\perp OB$. 求证：直线 L 过定点，并求出该定点的坐标.

（3）试将（2）小题的结论进行推广，并证明你所推广的结论.

解析 （1）动点 P 到定点 $F(1, 0)$的距离比它到直线 $x+2=0$ 的距离小 1，

所以动点 P 到定点 $F(1, 0)$的距离与它到直线 $x+1=0$ 的距离相等.

由抛物线定义得：点 P 在以 $F(1, 0)$为焦点直线 $x+1=0$ 为准线的抛物线上，

设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，则 $\frac{p}{2}=1$，解得 $p=2$.

所以抛物线方程为 $y^2=4x$.

（2）设直线 L 与抛物线交于点(x_1, y_1)，(x_2, y_2).

若直线 L 的斜率存在，设 L:$y=kx+b$，则$\begin{cases}y=kx+b,\\y^2=4x,\end{cases}$消 x 得 $ky^2-4y+4b=0$.因此$\begin{cases}k\neq 0,\\16-16kb\geq 0,\end{cases}$ 且 $y_1y_2=\frac{4b}{k}$.

又$\begin{cases}y_1^2=4x_1,\\y_2^2=4x_2,\end{cases}$ 得 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{16}=\frac{b^2}{k^2}$.

由 $OA\perp OB$，得 $\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$，即 $\frac{4k}{b}=-1$，$b=-4k$，直线为 $y=k(x-4)$，所以直线 L 过定点 (4, 0).

若直线 L 的斜率不存在，即直线 L 与 x 轴垂直，则直线 OA（或直线 OB）斜率为 1，

则$\begin{cases}y=x,\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $x=4$.所以直线 L 过定点(4,0).

（3）推广的结论为：直线 L 与 $y^2=2px(p>0)$相交于 A、B 两点，且 $OA\perp OB$，则直线 L 恒过定点$(2p, 0)$.

证明过程如下：

设 $A(\frac{y_1^2}{2p}, y_1)$，$B(\frac{y_2^2}{2p}, y_2)$，AB 与 x 轴的交点为 $C(m, 0)$.

$\because OA\perp OB$，$\therefore \frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}+y_1\cdot y_2=0$，即 $y_1y_2=-4p^2$.

直线 AB 的方程为 $\frac{y-y_1}{x-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}$，化简即 $\frac{y-y_1}{2px-y_1^2}=\frac{1}{y_2+y_1}$.

当 $y=0$ 时，$\frac{-y_1}{2px-y_1^2}=\frac{1}{y_2+y_1}$，解得 $x=\frac{-y_1y_2}{2p}=\frac{4p^2}{2p}=2p$，

∴直线 AB 过定点 $(2p, 0)$.

点评 *直线与抛物线相交的问题，常用方程组思想，消元得到一个一元二次方程，结合根与系数的关系进行研究，这在第 2 问的解答中充分体现了这种思路. 第 3 问则将第 2 问的定值规律进一步一般化，需要我们具有较强的思维推理及运算能力. 在圆锥曲线的研究中，存在着许多类似的定值问题，这些定值规律的探索，都必须经历由特例来猜测，然后通过运算来进行证明猜测是否成立.*

小结语 “先猜后证”，反映了人们的认识规律，也蕴含了“悟”的自然过程；“猜”是探索结论的感性认识基础，是“证”的前提与对象，而“证”则是“猜”的必然逻辑发展，是“猜”的归宿和证实，是对规律的领悟和理解，即“悟”的生动过程. 先猜后证，是数学发现之魂，我们一定要融会贯通这种精髓.

（作者单位：中山市东升镇高级中学）

责任编校　徐国坚