

2010年高考试题(新课程卷)分类解析(四)

平面向量与复数

高建彪(广东省中山市东升高中)

徐山洪(广东省中山市教育局教研室)

摘要: 笔者介绍了平面向量与复数两个专题内容在2010年新课程高考中的考查情况,从考情分析、考点精析、亮点扫描三个方面进行了详细的剖析,并针对2011届高三数学总复习提出了相应的复习策略.进入新一轮高三备考的师生,抓住历届高考题这一宝贵的资源,梳理清楚考题的类型和知识点的考查特点,对如何考做到心中有数,这样我们的复习一定会事半功倍.

关键词: 平面向量;复数;新课程高考;分类解析

平面向量是高中数学阶段引入的一种新的数学工具,由于向量具有数与形的双重意义,从而不但在平面向量自身体系有较强的运算工具性,也让平面向量在解决函数、三角、解析几何等数学问题中有了用武之地.复数由于解方程的需要引入后,将实数体系进行了扩充,也具有自身的运算工具性,同样可以交会解决函数、三角、几何等数学问题.平面向量与复数,都有相同的运算工具性,也有相同的交会特性,两者在新课程高考中,虽然以解答题呈现的考查概率小,但以客观题呈现考查的概率是非常大的,从而同样应当引起重视.

高中新课程改革实验始于2004年,海南、广东、山东、宁夏为首批实验区,这四个省份2007年进入了新课程高考.到2010年参加新课程高考的省份有广东、山东、海南、宁夏、江苏、辽宁、天津、安徽、福建、浙江、上海、北京、黑龙江、吉林、陕西、湖南共16个,其中宁夏、吉林、黑龙江、海南四地共用一套全国新课程试卷,江苏文理同卷,从而在2010年的新课程高考中,文理试卷共有25份.新课程的高考首先是由全国制定统一《考试大纲》,分省命题制定本地的“高考方案”,并根据统一的《考试大纲》编制《考试说明》,未列入分省命题的则由教育部考试中心编制《考试说明》与试题.虽然命题各自独立,但命题的依据都是同一本《考试大纲》,因而总结与分析全国各地的高考试卷,有助于我们在复习中找到良方妙药.下面针对平面向量与复数在2010年新课程高考中的考查情况进行剖析.

一、考情分析

1. 考纲要求

(1) 平面向量.

① 平面向量的实际背景及基本概念:了解向量的实际背景,理解平面向量的概念及向量相等的含义,理解向量的几何表示.

② 向量的线性运算:掌握向量加法、减法的运算,并理解其几何意义;掌握向量数乘的运算及其意义,理解两个向量共线的含义;了解向量线性运算的性质及其几何意义.

③ 平面向量的基本定理及坐标表示:了解平面向量的基本定理及其意义,掌握平面向量的正交分解及其坐标表示,会用坐标表示平面向量的加法、减法与数乘运算,理解用坐标表示的平面向量共线的条件.

④ 平面向量的数量积:理解平面向量数量积的含义及其物理意义,了解平面向量的数量积与向量投影的关系,掌握数量积的坐标表达式,会进行平面向量数量积的运算,能运用数量积表示两个向量的夹角,会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

⑤ 向量的应用:会用向量方法解决某些简单的平面几何问题,会用向量方法解决简单的力学问题与其他一些实际问题.

(2) 复数.

① 复数的概念:理解复数的基本概念,理解复数相等的充要条件,了解复数的代数表示法及其几何意义.

② 复数的四则运算:会进行复数代数形式的四则运算,了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

2. 考题分布

复数与平面向量考题分布情况,见表1和表2,平面向量与解答题交会情况见表3.

表1: 2010年高考数学试卷各省份复数考查情况分布表

卷别	题号	题型	考查知识
安徽卷·理	1	选择	复数除法
安徽卷·文	2	选择	复数乘法
北京卷·理	9	填空	复数除法、几何表示
北京卷·文	2	选择	复数几何表示
福建卷·文	4	选择	复数除法与乘方
广东卷·理	2	选择	复数乘法
湖南卷·文	1	选择	复数除法
江苏卷	2	选择	复数运算、模的性质
江西卷·理	1	选择	复数乘法运算、相等
辽宁卷·理/文	2	选择	复数运算、相等
新课程全国卷·理	2	选择	复数运算、共轭复数
新课程全国卷·文	3	选择	复数运算、模
山东卷·理/文	2	选择	复数运算、相等
陕西卷·理/文	2	选择	复数除法、几何表示
上海卷·理/文	2/4	填空	复数运算、共轭复数
天津卷·理/文	1	选择	复数除法
浙江卷·理	5	选择	复数运算、模、共轭复数
浙江卷·文	3	选择	复数除法

说明: 未考查复数的试卷有福建理、广东文、湖南理、江西文.仅北京文交会考查了中点坐标.

收稿日期: 2010-06-26

作者简介: 高建彪(1969-),男,湖南南县人,中学数学高级教师,主要从事数学教育与中学教学研究.

表 2: 2010 年高考数学试卷各省份选择、填空题平面向量考查情况分布表

卷别	题号	题型	交会内容	考查知识
安徽卷·理/文	3	选择	——	向量坐标运算、模、平行与垂直
北京卷·理	6	选择	充分条件、一次函数式	向量数量积、垂直
北京卷·文	4	选择	一次、二次函数与奇偶性	向量数量积、垂直
福建卷·理	7	选择	双曲线方程及几何性质、二次函数值域	向量数量积
福建卷·文	8	选择	充要条件	向量坐标表示、模
福建卷·文	11	选择	椭圆方程及几何性质、二次函数最大值	向量数量积
广东卷·文	5	选择	——	向量坐标运算 (数乘, 减法, 数量积)
湖南卷·理	4	选择	解直角三角形	向量数量积
江西卷·理	13	填空	余弦定理	向量模的运算、夹角与数量积
江西卷·文	13	填空	——	向量的投影
辽宁卷·理/文	8	选择	三角形面积	向量运算与表示
新课程全国卷·文	2	选择	——	向量坐标运算、夹角
山东卷·理/文	12	选择	新定义	向量坐标表示
陕西卷·理/文	11/12	填空	——	向量坐标运算、共线向量
上海卷·理/文	13	填空	双曲线方程及几何性质	向量运算
天津卷·理/文	15/9	填空/选择	解三角形	向量运算
浙江卷·文	13	填空	——	向量运算、垂直、模

说明: 未考查平面向量的试卷有湖南文、浙江理、广东理, 但广东理考查了空间向量坐标运算。

表 3: 2010 年高考数学试卷各省份解答题中平面向量考查情况分布表

卷别	题号	交会分支	考查知识
安徽卷·理/文	15/16	三角 (三角变换与解三角形)	向量数量积
福建卷·文	18	古典概型及概率计算	向量坐标表示、垂直
江苏卷	15	——	向量坐标运算、几何表示
陕西卷·理/文	20	椭圆方程及几何性质	向量数量积
上海卷·理/文	23	椭圆方程及几何性质	向量运算
天津卷·理/文	23/21	椭圆方程及几何性质	向量数量积

从以上统计表可以看出, 25 份新课程高考试卷中, 有 23 份试卷以客观题的形式独立考查了复数, 可见复数在高考中出现的概率之大. 分析高考中复数所涉及到的考查内容, 以复数的四则运算为主, 还有共轭复数、复数模、复数相等、复数分类等考点也同样重要, 但 2010 年的高考试题没有一个是关于复数分类的考查. 25 份新课程高考试卷中, 有 22 份试卷以客观题的形式考查了平面向量, 其中半数以上是与其他数学知识进行交会考查, 也有 10 份试卷在解答题中涉及到平面向量的考查, 特别是平面向量的数量积运算。

二、考点精析

分析上述考题分布对比表, 以下主要考查知识点在复习迎考中应当特别重视. 结合 2010 年的新课程高考题将考查知识点精析如下。

1. 复数运算

要求了解复数代数形式的加法、减法运算的几何意义, 特别是平行四边形法则和三角形法则, 会进行复数代数形式的四则运算, 以复数乘法、除法运算为重点。

例 1 (安徽卷·理 1) i 是虚数单位, $\frac{i}{\sqrt{3} + 3i} = ()$.

(A) $\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{12}i$ (B) $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}i$

(C) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$ (D) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$

立意: 考查复数的除法运算. 由于除法运算的法则是分子与分母同时乘以分母的共轭复数, 从而在考查复数四则运算时, 以除法运算为首选, 能同时考查到共轭复数、乘法运算等。



$$\text{解: } \frac{i}{\sqrt{3}+3i} = \frac{i(\sqrt{3}-3i)}{3+9} = \frac{\sqrt{3}+3i}{12} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}i,$$

故答案选 B.

例 2 (辽宁卷·理 2/文 2) 设 a, b 为实数, 若复数 $\frac{1+2i}{a+bi} =$

$1+i$, 则 ().

$$(A) a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2} \quad (B) a = 3, b = 1$$

$$(C) a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2} \quad (D) a = 1, b = 3$$

立意: 本题考查复数四则运算的同时, 考查了复数相等的概念, 进一步突出对计算能力的考查. 以下两种解法, 注意第 2 种方法代数变形的精巧之处.

$$\text{解: 由 } \frac{1+2i}{a+bi} = 1+i \text{ 可得 } 1+2i = (a-b) + (a+b)i,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} a-b=1, \\ a+b=2, \end{cases} \text{ 解得 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}, \text{ 故答案选 A.}$$

$$\text{另解: } a+bi = \frac{1+2i}{1+i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ 因此 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{1}{2}.$$

故答案选 A.

2. 模与共轭复数

要求掌握复数 $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbf{R}$) 模的计算公式, 即 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, 以及其共轭复数的形式 $\bar{z} = a-bi$. 两者的考查, 往往与复数运算进行交会.

例 3 (江苏卷 2) 设复数 z 满足 $z(2-3i) = 6+4i$ (其中 i 为虚数单位), 则 z 的模为 _____.

立意: 考查复数运算以及模的性质. 直接的方法是先求出复数 z , 再按公式求模, 简捷的方法是运用模的一些运算性质, 例如 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z| = |\bar{z}|$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 等.

$$\text{解: } z = \frac{6+4i}{2-3i} = \frac{(6+4i)(2+3i)}{4+9} = 2i,$$

$$\text{所以 } |z| = 2.$$

$$\text{另解: } z(2-3i) = 2(3+2i), 2-3i \text{ 与 } 3+2i \text{ 的模相等,}$$

所以 z 的模为 2.

$$\text{例 4 (新课程全国卷·理 2) 已知复数 } z = \frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}, \bar{z}$$

是 z 的共轭复数, 则 $z \cdot \bar{z} =$ ().

$$(A) \frac{1}{4} \quad (B) \frac{1}{2} \quad (C) 1 \quad (D) 2$$

立意: 本题主要考查复数的运算, 交会考查了共轭复数的知识, 可以直接计算, 但利用复数的一些运算性质可以简化运算.

$$\text{解: } z = \frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2} = \frac{\sqrt{3}+i}{-2-2\sqrt{3}i} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{1+\sqrt{3}i} =$$

$$\frac{1}{8}(\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-i),$$

$$z \cdot \bar{z} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-i) \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{3}+i) = \frac{1}{4}.$$

故答案选 A.

$$\text{另解: 由 } |z| = \left| \frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2} \right| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|1-\sqrt{3}i|^2} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{可得 } z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \frac{1}{4}. \text{ 故答案选 A.}$$

3. 向量坐标运算

要求在理解平面向量基本定理的基础上, 掌握平面向量的正交分解及其坐标表示, 会用坐标计算平面向量的加法、减法、数乘与数量积等.

例 5 (广东卷·文 5) 若向量 $a = (1, 1)$, $b = (2, 5)$, $c = (3, x)$ 满足条件 $(8a-b) \cdot c = 30$, 则 $x =$ ().

$$(A) 6 \quad (B) 5 \quad (C) 4 \quad (D) 3$$

立意: 考查向量的坐标运算. 由简单的一个试题, 覆盖了与向量的减法、数乘、数量积等相关的坐标运算, 也有方程思想蕴含其中, 体现了高考试题在考查设计上的独到之处.

$$\text{解: } 8a-b = (8, 8) - (2, 5) = (6, 3),$$

$$(8a-b) \cdot c = 6 \times 3 + 3x = 30, \text{ 解得 } x = 4. \text{ 故答案选 C.}$$

4. 向量模与夹角

要求掌握向量模的计算和向量夹角的计算, 特别是公式要运用熟练, 如向量 $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$, a 与 b 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

例 6 (江西卷·理 13) 已知向量 a, b 满足 $|a| = 1$, $|b| = 2$, a 与 b 的夹角为 60° , 则 $|a-b| =$ _____.

立意: 考查向量的夹角和向量的模长公式 $|a| = \sqrt{a^2}$, 可以由公式 $|a-b|^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$ 进行计算, 也可以通过向量减法运算的三角形法则, 结合余弦定理进行解决.

$$\text{解: } |a-b|^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2a \cdot b + b^2$$

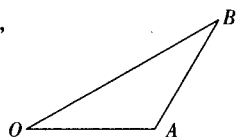
$$= 1^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos 60^\circ + 2^2 = 3,$$

$$\text{所以 } |a-b| = \sqrt{3}.$$

$$\text{另解: 如右图, 设 } a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB},$$

$$\text{则 } a-b = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}.$$

$$\text{由余弦定理得 } |a-b| = \sqrt{3}.$$



5. 向量平行与垂直

要求理解两个向量共线的含义, 理解用坐标表示平面向量共线的条件, 会用数量积判断两个平面向量的垂直关系.

例 7 (陕西卷·理 11/文 12) 已知向量 $a = (2, -1)$, $b = (-1, m)$, $c = (-1, 2)$, 若 $(a+b) \parallel c$, 则 $m =$ _____.

立意: 考查向量的坐标运算和共线向量的坐标关系, 考题属于简单题, 但也涉及到了对两个考点的考查.

$$\text{解: } a+b = (1, m-1),$$

$$\text{由 } (a+b) \parallel c \text{ 得 } 1 \times 2 - (m-1) \times (-1) = 0,$$

$$\text{解得 } m = -1.$$

例 8 (浙江卷·文 13) 已知平面向量 α, β , $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 2$, $\alpha \perp (\alpha - 2\beta)$, 则 $|2\alpha + \beta|$ 的值是 _____.

立意: 考查平面向量的四则运算、垂直关系以及模的运算, 属于中等难度的中档题.



解: 由题意可知 $\alpha \perp (\alpha - 2\beta) = 0$, 结合 $|\alpha|^2 = 1$, $|\beta|^2 = 4$,

$$\text{解得 } \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } |2\alpha + \beta|^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha \cdot \beta + \beta^2 = 8 + 2 = 10,$$

$$\text{从而 } |2\alpha + \beta| = \sqrt{10}.$$

6. 向量与其他分支的交会

向量作为一种工具, 可以与众多数学分支交会考查, 一般是与函数、三角、解析几何等交会, 在处理这些交会问题时, 我们要正确运用向量工具的计算特性, 解决好相关的交会考题.

例 9 (福建卷·文 11) 若点 O 和点 F 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的中心和左焦点, 点 P 为椭圆上的任意一点, 则 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 的最大值为().

- (A) 2 (B) 3 (C) 6 (D) 8

立意: 主要考查椭圆的方程、几何性质, 交会考查了平面向量的数量积的坐标运算、二次函数的单调性与最大值等, 考查对基础知识的熟练程度和数学知识的综合运用能力、运算能力等.

解: 由题意, $F(-1, 0)$. 设点 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则有 } \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1, \text{ 解得 } y_0^2 = 3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right).$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{FP} = (x_0 + 1, y_0), \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = x_0(x_0 + 1) + y_0^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP} = x_0(x_0 + 1) + 3\left(1 - \frac{x_0^2}{4}\right) = \frac{x_0^2}{4} + x_0 + 3,$$

此二次函数对应的抛物线的对称轴为 $x_0 = -2$,

又因为 $-2 \leq x_0 \leq 2$,

所以当 $x_0 = 2$ 时, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FP}$ 取得最大值为 $\frac{2^2}{4} + 2 + 3 = 6$, 故

答案选 C.

例 10 (安徽卷·文 16) $\triangle ABC$ 的面积是 30, 内角 A, B, C 所对边长分别为 a, b, c , $\cos A = \frac{12}{13}$.

(1) 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

(2) 若 $c - b = 1$, 求 a 的值.

立意: 本题在考查同角三角函数的基本关系、三角形面积公式、利用余弦定理理解三角形的同时, 借助向量的数量积达到了向量与三角交会的考查目的. 作为高考试卷解答题的第一个, 着眼于考查三角函数的基础知识和基本运算求解能力.

$$\text{解: 由 } \cos A = \frac{12}{13}, \text{ 得 } \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{又 } \frac{1}{2}bc\sin A = 30,$$

$$\text{所以 } bc = 156.$$

$$(1) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = bccos A = 156 \times \frac{12}{13} = 144.$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A = (c - b)^2 + 2bc(1 - cos A) = 1 + 2 \cdot 156 \cdot \left(1 - \frac{12}{13}\right) = 25, \text{ 所以 } a = 5.$$

三、亮点扫描

1. 复数大杂烩

例 11 (浙江卷·理 5) 对任意复数 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), i 为虚数单位, 则下列结论正确的是().

- (A) $|z - \bar{z}| = 2y$ (B) $z^2 = x^2 + y^2$
(C) $|z - \bar{z}| \geq 2x$ (D) $|z| \leq |x| + |y|$

解: 可对各选项逐个检查.

A 选项中, $|z - \bar{z}| \geq 2y$, 故选项 A 错误;

B 选项中, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, 故选项 B 错误;

C 选项中, $|z - \bar{z}| \geq 2y$, 故选项 C 错误;

D 选项中, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 结合三角形两边之和大于第三边, 易得 $|z| \leq |x| + |y|$, 所以 D 选项正确.

故答案选 D.

【点评】通过对复数代数形式的相关结论的研究, 考查了共轭复数、复数的模、复数的乘法以及相关的不等式性质. 题目有别于具体复数的研究, 借助四个代数关系的选项判断, 由字母运算的抽象性, 进一步提升了对运算能力的考查要求.

2. 向量大杂烩

例 12 (安徽卷·理 3/文 3) 设向量 $a = (1, 0)$, $b = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则下列结论中正确的是().

- (A) $|a| = |b|$ (B) $a \cdot b = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(C) $a \parallel b$ (D) $a - b$ 与 b 垂直

$$\text{解: } a - b = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (a - b) \cdot b = 0,$$

所以 $a - b$ 与 b 垂直.

故答案选 D.

【点评】此题依据向量的坐标运算, 直接代入求解, 即可判断出结论. 一道关于坐标运算的考题, 通过四个选择项的设计, 涉及到了对向量的模、数量积运算、平行、垂直等的考查, 实为一道人们十分喜欢的中华民族传统美食佳肴——“杂烩”.

3. 数量积搭桥

例 13 (北京卷·理 6) 若 a, b 是非零向量, “ $a \perp b$ ”是“函数 $f(x) = (xa + b) \cdot (xb - a)$ 为一次函数”的().

- (A) 充分而不必要条件
(B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要条件

$$\text{解: } f(x) = (xa + b) \cdot (xb - a) = (a \cdot b)x^2 + (b^2 - a^2)x - a \cdot b.$$

当 $a \perp b$ 时, $a \cdot b = 0$, 若有 $|b| = |a|$, 则函数恒为 0, $f(x)$ 不是一次函数, 因此条件不充分; 而如果 $f(x)$ 为一次函数, 则 $a \cdot b = 0$, 因此可得 $a \perp b$, 故该条件为必要. 故答案选 B.

【点评】以向量数量积的运算, 构造出一个函数, 通过对函数形式的分析与研究, 考查了向量的知识与简易逻辑知识. 一道借助向量数量积搭桥的交会考题, 融合了函数、向量、逻辑三大知识块, 考查形式上也颇为新颖.



4. 新定义运用

例 14 (山东卷·理 12/文 12) 定义平面向量之间的一种运算“ $\odot$ ”如下, 对任意的 $a = (m, n)$, $b = (p, q)$, 令 $a \odot b = mq - np$, 下面说法错误的是().

- (A) 若 a 与 b 共线, 则 $a \odot b = 0$
 (B) $a \odot b = b \odot a$
 (C) 对任意的 $\lambda \in \mathbf{R}$, 有 $(\lambda a) \odot b = \lambda(a \odot b)$
 (D) $(a \odot b)^2 + (ab)^2 = |a|^2 |b|^2$

解: 若 a 与 b 共线, 则有 $a \odot b = mq - np = 0$, 故选项 A 正确;

因为 $b \odot a = pn - qm$, 而 $a \odot b = mq - np$,

所以有 $a \odot b \neq b \odot a$, 故选项 B 错误, 故答案选 B.

【点评】在平面向量的基础上, 定义其一种新的运算, 研究新运算下的有关性质和结论. 这种涉及新定义的考题, 属高考中创新题型, 它既考查了平面向量的基础知识以及分析与解决问题的能力, 也起到了培养与检阅考生创新思维能力的作

5. 面积巧表示

例 15 (辽宁卷·理 8/文 8) 平面上 O 、 A 、 B 三点不共线, 设 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, 则 $\triangle OAB$ 的面积等于().

- (A) $\sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}$
 (B) $\sqrt{|a|^2 |b|^2 + (a \cdot b)^2}$
 (C) $\frac{1}{2} \sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}$
 (D) $\frac{1}{2} \sqrt{|a|^2 |b|^2 + (a \cdot b)^2}$

$$\begin{aligned} \text{解: } S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |a| |b| \sin \langle a, b \rangle \\ &= \frac{1}{2} |a| |b| \sqrt{1 - \cos^2 \langle a, b \rangle} \\ &= \frac{1}{2} |a| |b| \sqrt{1 - \frac{(a \cdot b)^2}{|a|^2 |b|^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2}, \end{aligned}$$

故答案选 C.

【点评】将三角形面积用向量表示出来, 巧妙地将向量运算与解三角形知识进行了交会. 解答过程中, 涉及到了正弦相关的三角形面积公式、正弦与余弦的平方关系、向量夹角的余弦公式, 对含向量式的代数变形也提出了较高要求.

6. 向量链接概率

例 16 (福建卷·文 18) 设平面向量 $a_m = (m, 1)$, $b_n = (2, n)$, 其中 $m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(1) 请列出有序数组 (m, n) 的所有可能结果;

(2) 记“使得 $a_m \perp (a_m - b_n)$ 成立的 (m, n) ”为事件 A , 求事件 A 发生的概率.

解: (1) 有序数组 (m, n) 的所有可能结果为:

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)$ 共 16 个.

$$(2) a_m - b_n = (m, 1) - (2, n) = (m-2, 1-n).$$

由 $a_m \perp (a_m - b_n)$, 得 $a_m \cdot (a_m - b_n) = 0$,

$$\text{即 } m(m-2) + 1 \cdot (1-n) = 0,$$

$$\text{整理为 } m^2 - 2m + 1 - n = 0,$$

$$\text{即 } n = (m-1)^2.$$

由于 $m, n \in \{1, 2, 3, 4\}$,

故事件 A 包含的基本事件为 $(2, 1)$ 和 $(3, 4)$, 共 2 个.

又基本事件的总数为 16,

$$\text{故所求的概率为 } P(A) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

【点评】向量链接概率, 以高考解答题形式来呈现, 给考生一种概率计算的新颖背景, 似乎有点陌生, 然而静下心来仔细阅读题, 不难发现题目实属简单, 只需掌握简单的列举法与数量坐标形式的减法及数量积运算即可. 本题既考查了概率与平面向量等基础知识, 也考查了运算求解能力、应用意识, 考查了化归与转化思想、必然与或然思想.

四、复习策略

1. 注重基础, 梳理考点

平面向量与复数在高考中的考查, 有近七成的考题只是涉及到对基础知识的考查. 我们要注重它们的基础性, 一定要牢固掌握相关的基础知识. 在复习中, 应当先梳理好其知识脉络, 然后逐一核查各知识点是否掌握. 例如复数, 包括复数分类、复数相等、几何意义、复数加减法、复数乘法、复数除法、共轭复数、复数的模等. 平面向量, 包括平面向量的基本概念、加减法、数乘、数量积、坐标运算、夹角、平行与垂直等.

2. 注重运算, 掌握方法

运算是一份高考试卷的根本. 平面向量与复数, 都有其自身的运算体系, 对相关的运算我们一定要牢牢掌握, 特别是复数的除法和向量的数量积运算, 两者是重中之重. 在掌握好运算的基础上, 也要掌握一些基本方法, 包括一些性质的运用.

3. 注重思想, 突破交会

数形结合思想与等价转化思想是高考考查的重点, 由于平面向量与复数都具有形的特征, 所以在复习中要注重数形结合的运用. 相关运算中, 对代数式的变形, 也是化归思想的渗透, 还有在处理一些复数问题中, 通过设复数的代数形式, 将复数问题实数化, 这就是一种等价转化的思想. 在注重思想的同时, 我们也要注意它们与其他数学知识的交会, 特别是向量, 其交会切入点和交会形式都比较多, 但交会的重点以向量的运算和向量的几何意义为主, 特别是向量的数量积.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (实验) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2003
 [2] 孙旭东. 2009 年高考数学试题分类解析 (六)——平面向量 [J]. 中国数学教育 (高中版), 2009(7/8)
 [3] 蔡芙蓉. 2009 年高考数学试题分类解析 (十五)——复数 [J]. 中国数学教育 (高中版), 2009(9)