

2011 年高考数学试题分类解析 (十三)

——复数

高建彪 (广东省中山市东升高中)
徐山洪 (广东省中山市教育局教研室)

摘要: 通过梳理 2011 年高考数学试卷中关于复数的考查情况, 对主要考点进行详细解析, 对考查亮点进行扫描与赏析, 并提出 2012 年高考数学备考策略.

关键词: 高考数学; 复数; 考情分析; 复习策略

2011 年全国高考中, 文理共 35 份数学试卷. 虽然当今的高考命题各省独立, 但命题的依据都是同一本《考试大纲》(大纲版或课标版); 总结与分析全国各地的高考数学试卷, 能让复习更有针对性. 复数是高中数学的经典考查内容, 它是由于解方程的需要而引入的, 它将实数体系进行了扩充. 由于复数自身具有运算工具性, 因此也能交会解决函数、三角、几何等数学问题. 复数在高考中, 以客观题的形式呈现考查的概率较大, 需要引起重视. 下面从四个方面对复数的考查进行剖析.

一、考情分析

1. 考纲要求

(1) 大纲课程高考要求.

① 了解引进复数的必要性; 理解复数的有关概念; 掌握复数的代数表示及几何意义.

② 掌握复数代数形式的运算法则, 能进行复数代数形式的加、减、乘、除运算.

③ 了解数系从自然数到有理数到实数再到复数扩充的基本思想.

(2) 新课程高考要求.

① 复数的概念: 理解复数的基本概念, 理解复数相等的充要条件, 了解复数的代数表示法及其几何意义.

② 复数的四则运算: 会进行复数代数形式的四则运算, 了解复数代数形式的加、减运算的几何意义.

2. 考点分布

复数的考点分布见下表. 下表中“理 $\times$ /文 $\times$ ”为文理同

题, 其余为单独试题; “百分比”指此类考点题数与复数考题总数的比.

知识点	试卷与题号	题数	百分比
复数运算	四川卷理 2, 重庆卷理 1, 北京卷文 2 / 理 2, 福建卷理 1, 福建卷文 1, 天津卷理 1 / 文 1, 浙江卷文 2	9	31.0%
复数的模	辽宁卷理 1, 陕西卷理 1, 陕西卷文 1	3	10.3%
共轭复数	大纲全国卷理 1, 新课程全国卷理 1, 浙江卷理 2	3	10.3%
复数相等	广东卷文 1, 湖南卷文 1 / 理 1, 江西卷理 1, 江西卷文 1, 上海卷文 1 / 理 1	7	24.1%
复数概念	江苏卷 1	1	3.4%
复数分类	安徽卷文 1 / 理 1	2	6.9%
几何意义	山东卷理 2 / 文 2	2	6.9%
i 幂性质	湖北卷理 1, 辽宁卷文 1	2	6.9%

(说明: 复数的模、共轭复数、复数相等考点的考查中, 也涉及到了复数运算的考查.)

此外, 在大纲课程高考数学中, 只有理科对复数提出了考查要求, 4 份大纲课程高考数学科试卷中, 均以基础题的形式考查了复数知识, 考查复数的概率为 100%. 在新课程高考数学中, 文理科均对复数提出了考查要求, 文理共 29 份新课程高考数学试卷, 有 26 份试卷考查了复数知识, 考查复数的概率为 90%.

从以上统计表可以看出, 复数在高考中出现的概率较大, 考查内容以复数的四则运算为主, 还有共轭复数、复数的模、复数相等、复数分类等考点也同样重要.

收稿日期: 2011-06-30

作者简介: 高建彪 (1969-), 男, 湖南南县人, 中学高级教师, 主要从事数学教育与中学教学研究.

二、考点精析

通过以上考情分析,下面对复数的主要考点进行罗列,并结合 2011 年的高考试题进行详细的解析.

1. 复数四则运算

要求了解复数代数形式的加法、减法运算的几何意义,特别是平行四边形法则和三角形法则,会进行复数代数形式的四则运算,以复数乘法、除法运算为重点.

例 1 (四川卷·理 2) 复数 $-i + \frac{1}{i} = (\quad)$.

- (A) $-2i$ (B) $\frac{1}{2}i$
(C) 0 (D) $2i$

解: $-i + \frac{1}{i} = -i - i = -2i$. 故答案选 A.

例 2 (天津卷·文 1 / 理 1) i 是虚数单位, 复数 $\frac{1-3i}{1-i} = (\quad)$.

- (A) $2+i$ (B) $2-i$
(C) $-1+2i$ (D) $-1-2i$

解: $\frac{1-3i}{1-i} = \frac{(1-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$. 故答案选 B.

例 3 (北京卷·文 2 / 理 2) 复数 $\frac{i-2}{1+2i} = (\quad)$.

- (A) i (B) $-i$
(C) $-\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ (D) $-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

解: $\frac{i-2}{1+2i} = \frac{(i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{i-2i^2-2+4i}{1-4i^2} = \frac{i-2(-1)-2+4i}{1-4(-1)} = \frac{i-2+2+4i}{1+4} = \frac{5i}{5} = i$.

故答案选 A.

例 4 (浙江卷·文 2) 若复数 $z = 1+i$, i 为虚数单位, 则 $(1+z) \cdot z = (\quad)$.

- (A) $1+3i$ (B) $3+3i$
(C) $3-i$ (D) 3

解: 因为 $z = 1+i$, 所以 $(1+z) \cdot z = (2+i)(1+i) = 1+3i$.

故答案选 A.

【评析】透过以上 4 例复数代数形式的四则运算的考题, 可以看出复数除法运算为考查重点, 因为除法运算的法则是分子与分母同时乘以分母的共轭复数, 这样同时考查到了共轭复数、乘法运算等.

2. 模与共轭复数

要求掌握复数 $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 模的计算公式, 即 $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, 以及其共轭复数 $\bar{z} = a-bi$ 的形式. 模与共轭复数的考查, 往往交会复数运算. 同时要注意模的性质的运用, 如 $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$, $|z| = |\bar{z}|$, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 等.

例 5 (江西卷·理 1) 若 $z = \frac{1+2i}{i}$, 则复数 $\bar{z} = (\quad)$.

- (A) $-2-i$ (B) $-2+i$
(C) $2-i$ (D) $2+i$

解: $z = \frac{1+2i}{i} = \frac{i+2i^2}{i^2} = \frac{i-2}{-1} = 2-i$, 所以答案选 C.

例 6 (新课程全国卷·理 1) 复数 $\frac{2+i}{1-2i}$ 的共轭复数是 $(\quad)$.

- (A) $-\frac{3}{5}i$ (B) $\frac{3}{5}i$
(C) $-i$ (D) i

解: $\frac{2+i}{1-2i} = \frac{(2+i)(1+2i)}{5} = i$, 共轭复数为 $-i$.

故答案选 C.

例 7 (大纲全国卷·理 1) 复数 $z = 1+i$, $\bar{z}$ 为 z 的共轭复数, 则 $z\bar{z} - z - 1 = (\quad)$.

- (A) $-2i$ (B) $-i$
(C) i (D) $2i$

解: $z\bar{z} - z - 1 = |z|^2 - z - 1 = 2 - (1+i) - 1 = -i$. 答案选 B.

例 8 (浙江卷·理 2) 把复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$, i 为虚数单位. 若 $z = 1+i$, 则 $(1+z) \cdot \bar{z} = (\quad)$.

- (A) $3-i$ (B) $3+i$
(C) $1+3i$ (D) 3

解: 因为 $z = 1+i$, 所以 $\bar{z} = 1-i$.

所以 $(1+z) \cdot \bar{z} = (1+1+i)(1-i) = 3-i$.

故答案选 A.

例 9 (辽宁卷·理 1) a 为正实数, i 为虚数单位, $\left| \frac{a+i}{i} \right| = 2$, 则 $a = (\quad)$.

- (A) 2 (B) $\sqrt{3}$
(C) $\sqrt{2}$ (D) 1

解: $\frac{a+i}{i} = \frac{ai+i^2}{i^2} = \frac{ai-1}{-1} = 1-ai$,

则 $|1-ai| = \sqrt{1+(-a)^2} = 2$, 得 $a = \sqrt{3}$ ($-\sqrt{3}$ 舍去),

故答案选 B.

【评析】模与共轭复数的考查, 往往建立在复数运算的基础上. 模与共轭复数的计算公式较为简单, 只要不记错, 一般能轻易解决问题.

3. 复数相等

要求理解复数相等的充要条件, 即 $a+bi = c+di \Leftrightarrow a=c, b=d$, 其中 a, b, c, d 为实数.

例 10 (湖南卷·理 1 / 文 2) 若 $a, b \in \mathbb{R}$, i 为虚数单位, 且 $(a+i)i = b+i$, 则 $(\quad)$.

- (A) $a=1, b=1$ (B) $a=-1, b=1$
(C) $a=-1, b=-1$ (D) $a=1, b=-1$

解: 因为 $(a+i)i = -1+ai = b+i$,

根据复数相等的条件可知 $a=1, b=-1$, 故答案选 D.

例 11 (江西卷·文 1) 若 $(x-i)i = y+2i$, $x, y \in \mathbb{R}$, 则复数 $x+yi = (\quad)$.

- (A) $-2+i$ (B) $2+i$
(C) $1-2i$ (D) $1+2i$



解: 因为 $(x-i)i = xi - i^2 = 1 + xi = y + 2i$,

所以 $y = 1, x = 2$,

所以 $x + yi = 2 + i$,

故答案选 B.

例 12 (广东卷·文 1) 设复数 z 满足 $iz = 1$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z =$ ().

(A) $-i$ (B) i

(C) -1 (D) 1

解法 1: 设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$,

则 $iz = i(a + bi) = -b + ai = 1$,

所以 $a = 0, b = -1$, 即 $z = -i$,

故答案选 A.

解法 2: $z = \frac{1}{i} = \frac{-i}{i \times (-i)} = -i$, 故答案选 A.

例 13 (广东卷·理 1) 设复数 z 满足 $(1+i)z = 2$, 其中 i 为虚数单位, 则 $z =$ ().

(A) $1+i$ (B) $1-i$

(C) $2+2i$ (D) $2-2i$

解法 1: 设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$,

则 $(1+i)z = (1+i)(a+bi) = a-b + (a+b)i = 2$,

所以 $\begin{cases} a-b=2, \\ a+b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases}$ 所以 $z = 1-i$, 故答案选 B.

解法 2: $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = 1-i$, 故答案选 B.

例 14 (江苏卷 3) 设复数 z 满足 $i(z+1) = -3+2i$ (i 为虚数单位), 则 z 的实部是_____.

解法 1: 设 $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$,

则 $i(z+1) = i(a+bi+1) = -b + (a+1)i = -3+2i$,

所以 $\begin{cases} -b=-3, \\ a+1=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=3, \end{cases}$ 所以 $z = 1+3i$, 实部为 1.

解法 2: 由 $i(z+1) = -3+2i$, 得 $z = \frac{-3+2i}{i} - 1 = \frac{-3i+2i^2}{i^2} - 1 = 3i+2-1 = 1+3i$, 所以 z 的实部为 1.

【评析】复数的相等, 需要抓住其充要条件, 通过设复数的代数形式, 进行一些简单的复数运算后, 列出相应的方程组, 或者直接利用代数运算求出复数 z , 这种方法更为简捷.

4. 复数基本概念

要求理解复数的基本概念, 例如复数的分类、复数的表示方法等.

例 15 (安徽卷·文 1/理 1) 设 i 是虚数单位, 复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数, 则实数 a 为 ().

(A) 2 (B) -2

(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

解法 1: $\frac{1+ai}{2-i} = \frac{(1+ai)(2+i)}{5} = \frac{(2-a) + (2a+1)i}{5}$,

由于 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} 2-a=0, \\ 2a+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $a=2$, 故答案选 A.

解法 2: 设 $\frac{1+ai}{2-i} = bi$ ($b \in \mathbb{R}$),

则 $1+ai = bi(2-i) = b+2bi$, 所以 $b=1, a=2$.

故答案选 A.

例 16 (山东卷·文 2/理 2) 复数 $z = \frac{2-i}{2+i}$ (i 为虚数单位)

在复平面内对应的点所在象限为 ().

(A) 第一象限 (B) 第二象限

(C) 第三象限 (D) 第四象限

解: 因为 $z = \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)^2}{5} = \frac{3-4i}{5}$, 故复数 z 对应的点在第四象限, 故答案选 D.

【评析】复数基本概念, 要记牢实部、虚部的定义, 在此基础上理解复数的分类和几何表示、代数形式等. 由以上两例也可以看出, 复数基本概念的考查, 一般也建立在复数运算的基础上.

5. 复数性质

复数的性质, 主要是 i 幂的运算性质, 紧紧扣住 $i^4=1, i^{4n+1}=i, i^{4n+2}=i^2=-1, i^{4n+3}=i^3=-i$, 其中 $n \in \mathbb{Z}$.

例 17 (福建卷·文 2) i 是虚数单位, $1+i^3$ 等于 ().

(A) i (B) $-i$

(C) $1+i$ (D) $1-i$

解: $1+i^3 = 1-i$, 故答案选 D.

例 18 (辽宁卷·文 2) i 为虚数单位, $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} =$ ().

(A) 0 (B) $2i$

(C) $-2i$ (D) $4i$

解: $\frac{1}{i} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7} = \frac{1}{i} + \frac{1}{-i} + \frac{1}{i} + \frac{1}{-i} = 0$,

故答案选 A.

例 19 (福建卷·理 1) i 是虚数单位, 若集合 $S = \{-1, 0, 1\}$, 则 ().

(A) $i \in S$ (B) $i^2 \in S$

(C) $i^3 \in S$ (D) $\frac{2}{i} \in S$

解: $i^2 = -1 \in S$. 故答案选 B.

例 20 (湖北卷·理 1) i 为虚数单位, 则 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2011} =$ ().

(A) $-i$ (B) -1

(C) i (D) 1

解: 因为 $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = i$,

所以 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2011} = i^{2011} = i^{4 \times 502 + 3} = i^3 = -i$,

故答案选 A.

例 21 (重庆卷·理 1) 复数 $\frac{i^2+i^3+i^4}{1-i} =$ ().

(A) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (B) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$$(C) \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad (D) \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

解: $\frac{i^2 + i^3 + i^4}{1-i} = \frac{-1-i+1}{1-i} = \frac{-i}{1-i} = \frac{-i(1+i)}{2} = \frac{-i-i^2}{2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 故答案选 C.

【评析】i 幂运算性质的考查中, 也紧紧扣住了复数的代数运算, 特别是乘法与除法.

三、亮点扫描

1. 解答题考综合

例 22 (上海卷·文 19/理 19) 已知复数 z_1 满足 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ (i 为虚数单位), 复数 z_2 的虚部为 2, 且 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 求 z_2 .

立意: 综合考查复数相等、运算、基本概念等基础知识.

解: 由 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ 得 $z_1 = 2 - i$.

设 $z_2 = a + 2i$, $a \in \mathbb{R}$,

则 $z_1 z_2 = (2 - i)(a + 2i) = (2a + 2) + (4 - a)i$,

因为 $z_1 \cdot z_2$ 是实数, 所以 $a = 4$, 所以 $z_2 = 4 + 2i$.

【评析】一道复数综合问题的求解, 涉及到了复数相等、乘法运算、复数虚部概念和复数分类等基础知识, 一类通法 (设复数的代数形式, 将复数问题代数化) 也需引起我们的重视. 复数的考查以解答题的形式来呈现, 唯有上海高考十分突出.

上海在 2002 年开始进行图形计算器的普及推广, 并正酝酿着图形计算器进入高考, 那么上海高考中关于复数的考题, 能否用图形计算器进行解决呢? 笔者利用 TI 图形计算器 (机型: TI-NspireTM CX CAS 中文彩屏机), 调用其代数计算功能中的复数方程求解 (cSolve 命令), 先从 $(z_1 - 2)(1 + i) = 1 - i$ 中解出 $z_1 = 2 - i$, 然后定义 $z_2 = a + 2i$, 计算出 $z_1 z_2 = (2a + 2) + (4 - a)i$, 再从虚部为 0 的实数方程中解出 a , 显示结果如下图 (图 1、图 2), 可以看出, 先进科学工具的运用, 将繁琐的计算过程交给了工具, 能让学生能更好地掌握解决数学问题中的算理, 这也体现了数学学习的精髓所在.

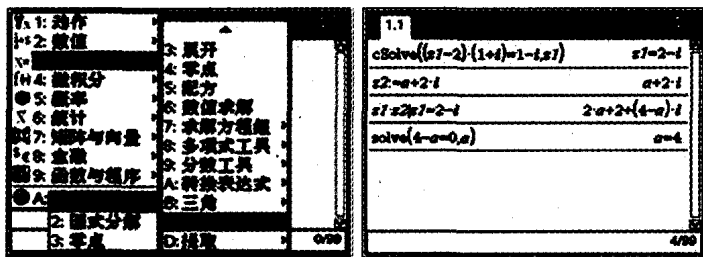


图 1

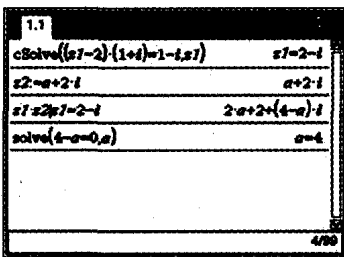


图 2

2. 姊妹题求创新

例 23 (陕西卷·文 8) 设集合 $M = \{y | y = |\cos^2 x - \sin^2 x|, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \left\{x \mid \left|\frac{x}{i}\right| < 1, i \text{ 为虚数单位}, x \in \mathbb{R}\right\}$, 则 $M \cap N$ 为 ().

- (A) (0, 1) (B) (0, 1]
(C) [0, 1) (D) [0, 1]

立意: 通过对集合的考查, 交会考查了三角函数、复数的模、不等式等知识点.

解: 因为 $y = |\cos^2 x - \sin^2 x| = |\cos 2x| \in [0, 1]$, 所以 $M = [0, 1]$.

因为 $\left|\frac{x}{i}\right| < 1$, 即 $|-xi| < 1$, 所以 $|x| < 1$,

又因为 $x \in \mathbb{R}$, 所以 $-1 < x < 1$, 即 $N = (-1, 1)$.

所以 $M \cap N = [0, 1)$.

故答案选 C.

例 24 (陕西卷·理 7) 设集合 $M = \{y | y = |\cos^2 x - \sin^2 x|, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \left\{x \mid \left|x - \frac{1}{i}\right| < \sqrt{2}, i \text{ 为虚数单位}, x \in \mathbb{R}\right\}$, 则 $M \cap N$ 为 ().

- (A) (0, 1) (B) (0, 1]
(C) [0, 1) (D) [0, 1]

解: 因为 $y = |\cos^2 x - \sin^2 x| = |\cos 2x| \in [0, 1]$, 所以 $M = [0, 1]$.

因为 $\left|x - \frac{1}{i}\right| < \sqrt{2}$,

所以 $|x + i| < \sqrt{2}$,

又因为 $x \in \mathbb{R}$, 所以 $-1 < x < 1$, 即 $N = (-1, 1)$.

所以 $M \cap N = [0, 1)$.

故答案选 C.

【评析】历年来的高考中, 都以一道基础题的形式来单独考查复数, 而 2011 年的陕西高考数学卷, 文理科以姊妹题的形式, 将复数交会到多个知识点中进行考查, 打破了复数的考查常规, 创新的模式为各省高考考查复数的形式开创了先例.

四、复习策略

1. 全面复习, 重视基础

复数在高考中的考查, 90% 的可能是考查基本概念或基本运算, 并且考题最大的可能性是处于试卷的第 1 题或第 2 题的位置, 也足以看出考查复数以基础题为主. 因此, 我们在复习中, 应以基础内容的复习为主. 复数的基础知识包括复数分类、复数相等、几何意义、复数加减法、复数乘法、复数除法、共轭复数、复数的模等, 这些内容都应当全面复习.

2. 扣住运算, 注意通法

复数的考查, 以复数代数形式的四则运算为主, 即使复数相等、共轭复数等的考查, 也离不开复数代数运算, 从而我们应当紧紧扣住复数的代数运算. 同时, 解决复数问题时, 有一种通用的方法我们也必须掌握, 就是通过设复数的代数形式, 将复数问题代数化.

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (实验)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2003.
- [2] 蔡芙蓉. 2009 年高考数学试题分类解析 (十五): 复数[J]. 中国数学教育 (高中版), 2009(9): 36-40.
- [3] 高建彪, 徐山洪. 2010 年高考数学试题 (新课程卷) 分类解析 (四): 平面向量与复数[J]. 中国数学教育 (高中版), 2010(7/8): 31-35.