2012年高考解析几何命题预测

■许少华

“一样的数学基础，一样的学习时间，也一样的用功，但高考结果却分数差距较大，这是为什么？”为什么呢？你想知道吗？其实，高考说起来很神秘，但想起来也就那么回事，不就是解二十几个题吗？解好了，分数就高；解差了，分数自然就低.这些地球人都知道，问题是：如何解好？关键是考前复习，你听过“年年岁岁花相似、岁岁年年题不同”的说法吗？“花相似”如何理解？它告诉我们：特殊考点与重要技能是年年非考不可的.如果我们能用较少的题对这些必考内容进行有效覆盖，而我们又对这些题都能熟练掌握，那么，会“解差”吗？下面就按这个思路，让我们来看看解析几何可能如何考？

一、结合解几的基础内容，考查直线、圆等基础知识与基本技能

直线与圆是解析几何的基础内容，围绕这一内容设计的选择题与填空题相当多.此类题往往具有交汇性、灵活性，虽然难度不大，但涉及的基本方法与基本技能绝不单纯.

例1 已知圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=2a+b$ 交于 A,B 两点，且 OA,OB 与 x 轴正向所成的角分别为 α,β，则 $\sin(\alpha+\beta)=$__________.

解析 由 $\begin{cases}y=2x+b,\\x^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow 5x^2+4bx+(b^2-1)=0$，设 A，B 两点坐标分别为 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，

那么 $\begin{cases}\cos\alpha+\cos\beta=-\dfrac{4b}{5},\\ \cos\alpha\cos\beta=-\dfrac{b^2-1}{5},\end{cases}$ 又 $\begin{cases}\sin\alpha=2\cos\alpha+b,\\ \sin\beta=2\cos\beta+b,\end{cases}$

得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=(2\cos\alpha+b)\cos\beta+\cos\alpha(2\cos\beta+b)=4\cos\alpha\cos\beta+b(\cos\alpha+\cos\beta)=4\cdot\dfrac{b^2-1}{5}+b\cdot(-\dfrac{4b}{5})=-\dfrac{4}{5}$.

点评 本题是一道填空题，涉及直线与圆的位置关系、三角函数的定义，求解时，既要用到解几的常规技能又要用三角的基本换化，不是很难，但有灵活性.

二、结合基本量之间的关系，考查某一参数的范围或最值

圆锥曲线方程中的 a,b,c、离心率、渐近线方程等都是基本量，很多看似复杂的问题，其实就是这些量之间的关系问题，只要我们深入分析、透彻理解很快便迎刃而解.看看2011年浙江、天津、福建卷都在此处设计了试题.

例2 已知椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1(0<b<1)$ 的左焦点为 F，左、右顶点分别为 A、C，上顶点为 B.过 F、B、C 作 $\odot P$，其中圆心 P 的坐标为 (m,n).当 $m+n>0$ 时，椭圆离心率的范围为____________.

解析 设 F、B、C 的坐标分别为 $(-c,0),(0,b),(1,0)$，则 FC、BC 的中垂线分别为 $x=\dfrac{1-c}{2}$，$y-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1}{b}(x-\dfrac{1}{2})$，

联立方程组，得 $\begin{cases}x=\dfrac{1-c}{2},\\ y=\dfrac{b^2-c}{2b}.\end{cases}$

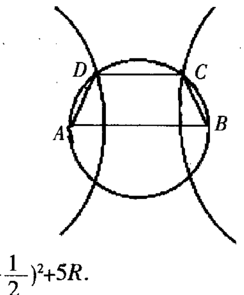
于是 $m+n=\dfrac{1-c}{2}+\dfrac{b^2-c}{2b}>0$，即 $b-bc+b^2-c>0\Rightarrow(1+b)(b-c)>0\Rightarrow b>c$，从而 $b^2>c^2$ 即有 $a^2>2c^2$，$\therefore e^2<\dfrac{1}{2}$，又 $e>0$，$\therefore 0<e<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

点评 本题是基本量之间的基本关系，首先通过焦点、顶点设出坐标，然后，产生圆心坐标，进一步得到 $b>c$，由此产生离心率的范围.

三、结合几何性质，考查圆锥曲线的离心率

离心率是圆锥曲线的重要特征量，看看历年高考试题，在离心率上“作文章”的有多少？也许不看不知道，看了吓一跳.为什么它如此倍受命题人的青睐呢？它除了牵动着圆锥曲线方程中 a,b,c 的之间的关系以外，它还可以直接解释椭圆的扁平及双曲线的开口的大小.

例3 如下图，以 AB 为直径的圆有一内接梯形 $ABCD$,且 $AB/\!/CD$.若双曲线 C_1 以 A、B 为焦点，且过 C、D 两点，则当梯形的周长最大时，双曲线的离心率为__________.



解析 $\angle BAC=\theta$，作 $CE\perp AB$ 于点 E，则 $BC=2R\sin\theta$，$EB=BC\cos(90°-\theta)=2R\sin^2\theta$，$CD=2R-4R\sin^2\theta$，梯形的周长：

$l=AB+2BC+CD=2R+4R\sin\theta+2R-4R\sin^2=-4R(\sin\theta-\dfrac{1}{2})^2+5R$.

当 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，即 $\theta=30°$时，l 有最大值 $5R$，这时，

$BC=R$，$AC=\sqrt{3}R$，$a=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)R$，

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$.

点评 本考查求离心率，但有一个条件，就是周长最大时，如何产生周长？何时周长最大？显然，除了要有圆锥曲线的基础知识之外，还要具有应用数学基础知识求解问题的能力.

四、结合定义，考查圆锥曲线中的数形结合思想

圆锥曲线的定义是圆锥曲线的基础，也是圆锥曲线基本技能与基本方法的生长点.看看我们的教材，在例题、练习、习题中有三分之一以上的题都与定义有关.无论高考命题的指导思想是“以能力立意”，还是“源于教材，而高于教材”，圆锥曲线的定义，都必将受到命题人的特别关注.

例4 已知点 Q 是圆 M: $(x+1)^2+y^2=64$ 上动点（圆心为 M），点 N (1,0)，若线段 QN 的中垂线 MQ 交于点 P.

（1）求动点 P 的轨迹 E 的方程.

（2）已知 $A(1,0)$,$B(2,2)$，T 是轨迹 E 上的一动点，求 $|TA|+|TB|$ 的最大值.

（3）在动点 P 的轨迹上是否存在点 T，使 $\frac{1}{|TM|}$，$\frac{1}{|MN|}$，$\frac{1}{|TN|}$ 成等差数列？若存在，求出 $|TM|$ 与 $|TN|$ 值；若不存在，说明理由.

解析（1）由线段 QN 的中垂线交 MQ 于点 P，得 $|PN|=|PQ|$，

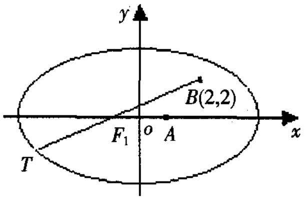
那么 $|PM|+|PN|=|PM|+|PQ|=8>|MN|$，

所以动点 P 的轨迹是以 N、Q 为焦点，以 8 为长轴长的椭圆，

即 $2c=2$，$2a=8\Rightarrow c=1$，$a=4$，得 $b^2=16-1=15$，

故 P 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$.

（2）易知 A 为椭圆的右焦点，设左焦点为 F_1，由 $a^2=16$ 知 $|TA|+|TF_1|=8$，因此 $|TA|+|TB|=8+|TB|-|TF_1|$ 问题转化为“求椭圆上一点到 B,F_1 两点距离之差的最大值”；如图，连 B,F_1 并延长交椭圆与 T 点.



此时，$|TB|-|TF_1|$ 最大，其值为 $\sqrt{(2+1)^2+2^2}=\sqrt{13}$，故 $|TA|+|TB|$ 的最大值为 $8+\sqrt{13}$.

（3）假设存在点 T 满足题设，由 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$，可知 $|TM|+|TN|=8$，$|MN|=2$，结合 $\frac{2}{|MN|}=\frac{1}{|TM|}+\frac{1}{|TN|}$，得 $|TM|\cdot|TN|=8$.

由 $\begin{cases}|TM|+|TN|=8,\\|TM|\cdot|TN|=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|TM|=4+2\sqrt{2},\\|TN|=4-2\sqrt{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|TM|=4-2\sqrt{2},\\|TN|=4+2\sqrt{2}.\end{cases}$

由于 $3\leqslant|TM|\leqslant5$ 且 $3\leqslant|TM|\leqslant5$，

而 $4-2\sqrt{2}<3$，$4+2\sqrt{2}>5$，

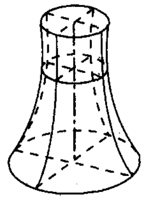
故点 T 不存在.

点评 本题以 2-1 教材 P49A 组第 7 题（1-1 教材 P42A 组第 7 题）为原形进行改编、深化，第一问直接考查椭圆定义的应用、第二问建立在定义的基础上考查数形结合思想的应用、第三问建立在定义的基础上考查方程思想及分析判断的能力.

五、结合实际应用问题，考查圆锥曲线的基础知识与应用技能

实际应用问题以前是函数、数列的“特产”，近年范围有所改变，有向解几“蔓延”的趋势.再加上，解几中确实存在着诸多实际应用的因素，它与现实生活中很多现象都有千丝万缕的联系，比如：神七的运行轨道、郭晶晶跳水的空中曲线、双曲线型冷却塔等.

例5 某热电厂积极推进节能减排工作，技术改造项目“循环冷却水系统”采用双曲线型冷却塔（如右图），以使得冷却器中排出的热水在其中冷却后可重复使用，从而实现热电系统循环水的零排放.



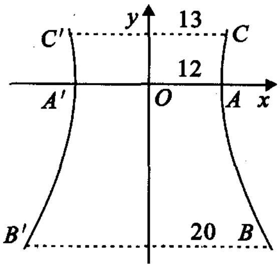
（1）冷却塔的外形是双曲线的一部分绕其虚轴旋转所成的曲面，要求它的最小半径为 12 m，上口半径为 13 m，下口半径为 20 m，且双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{34}}{3}$，试求冷却塔的高应当设计为多少？

（2）该项目首次需投入资金 4000 万元，每年节能后可增加收入 600 万元. 投入使用后第一年的维护费用为 30 万元，以后逐年递增 20 万元. 为使年平均节能减排收益达到最大值，多少年后报废该套冷却塔系统比较适合？

解析（1）如图，建立平面直角坐标系. 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$.由题意可知，$a=12$，$e=\frac{c}{a}=\frac{c}{12}=\frac{\sqrt{34}}{3}$，解得 $c=4\sqrt{34}$.

从而 $b^2=c^2-a^2=(4\sqrt{34})^2-12^2=400$，

$\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{400}=1$.



将 $x=13$ 代入，解得 $|y|=\frac{25}{3}$. 将 $x=20$ 代入，解得 $|y|=\frac{80}{3}$.

所以，冷却塔的高为 $\frac{25}{3}+\frac{80}{3}=\frac{105}{3}$ m.

（2）n 年后的年平均减排收益为：

$$\frac{600n-[30n+\frac{n(n-1)}{2}\times20]-4000}{n}=\frac{-10n^2+580n-4000}{n}=$$

$-10(n+\frac{400}{n})+580\leqslant-10\times2\sqrt{n\cdot\frac{400}{n}}+580=180$，当且仅当 $n=\frac{400}{n}$ 即 $n=20$ 时等号成立，即 20 年后报废该套冷却塔系统比较适合.

点评 本题可能又有似曾相识的感觉，是的，这是建立在 2-1 教材 P58 页例 3（1-1 教材 P50 页例 4）为原形进行改编的.它将数列、不等式等尽收其中，试题不难，但却是难得的好题.

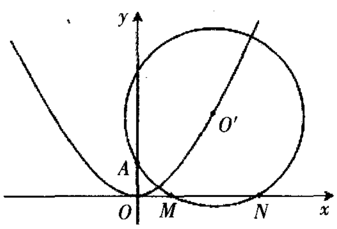
六、结合创新，考查圆锥曲线中的探索性问题

以解几的主干知识为依托，命制新背景、新定义、新运算、新性质等的创新题型，考查考生创新能力与创新意识，考查考生捕捉信息与处理信息的能力.近年湖南考查新定义，广东、陕西、山东考探索性问题，这些都是对创新应用的考查.

例 6 $\odot O'$ 过定点 $A(0,p)(p>0)$，圆心 O' 在抛物线 $x^2=2py$ 上运动，MN 为圆 O' 在 x 轴上所截得的弦.

（1）当 O' 点运动时，$|MN|$ 是否有变化？并证明你的结论；

（2）当 $|OA|$ 是 $|OM|$ 与 $|ON|$ 的等差中项时，试判断抛物线 C 的准线与圆 O' 的位置关系，并说明理由.



解析（1）设 $O'(x_0,y_0)$，则 $x_0^2=2py_0(y_0\geqslant0)$，则 $\odot O'$ 的半径 $|O'A|=\sqrt{x_0^2+(y_0-p)^2}$，$\odot O'$ 的方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x_0^2+(y_0-p)^2$.

令 $y=0$，并把 $x_0^2=2py_0$ 代入得 $x^2-2x_0x+x_0^2-p^2=0$，

解得 $x_1=x_0-p$，$x_2=x_0+p$，所以 $|MN|=|x_1-x_2|=2p$.

这说明 $|MN|$ 是不变化，其为定值 $2p$.

（2）不妨设 $M(x_0-p,0)$，$N(x_0+p,0)$.

由题 2，$|OA|=|OM|+|ON|$，得 $2p=|x_0-p|+|x_0+p|$，所以 $-p\leqslant x_0\leqslant p$.

O' 到抛物线准线 $y=-\frac{p}{2}$ 的距离 $d=y_0+\frac{p}{2}=\frac{x_0^2+p^2}{2p}$，

$\odot O'$ 的半径 $|O'A|=\sqrt{x_0^2+(y_0-p)^2}=\sqrt{x_0^2+(\frac{x_0^2}{2p}-p)^2}=\frac{1}{2p}\sqrt{x_0^4+4p^4}$.

$\because r>d\Leftrightarrow x_0^4+4p^4>(x_0^2+p^2)^2\Leftrightarrow x_0^2<\frac{3}{2}p^2$，

又 $x_0^2\leqslant p^2<\frac{3}{2}p^2$ $(p>0)$，所以 $r>d$，即 $\odot O'$ 与抛物线的准线总相交.

点评 本题两问的结论都具有探索性，但难度不大，只要抓住圆锥曲线的常规运算技能与技巧都能较好地完成本题求解.

七、结合多种圆锥曲线，考查圆锥曲线常规技能的应用

多种圆锥曲线联合进行设计试题是广东近年高考命题的一大特色，2007 年是圆与椭圆、2008 年椭圆与抛物线、2009 年圆与抛物线、2010 年双曲线与椭圆、2011 年圆与双曲线，看看从新课标实施以来哪一年考题是单独考查某一种曲线？因此，注重多种圆锥曲线联合是必须的也是应该的.

例 7 已知双曲线 G 的中心在原点，它的渐近线与圆 $x^2+y^2-10x+20=0$ 相切.过点 $P(-4,0)$ 作斜率为 $\frac{1}{4}$ 的直线 l，使得 l 和 G 交于 A,B 两点，和 y 轴交于点 C，并且点 P 在线段 AB 上，又满足 $|PA|\cdot|PB|=|PC|^2$.

（1）求双曲线 G 的方程；

（2）椭圆 S 的中心在原点，它的短轴是 G 的实轴.如果 S 中垂直于 l 的平行弦的中点的轨迹恰好是 G 的渐近线截在 S 内的部分，求椭圆 S 的方程.

解析（1）设双曲线 G 的渐近线的方程为 $y=kx$，则由已知可得 $\frac{|5k|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{5}$，所以 $k=\pm\frac{1}{2}$，即双曲线 G 的渐近线的方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$.

设双曲线 G 的方程为 $x^2-4y^2=m$.由 $\begin{cases}y=\frac{1}{4}(x+4),\\x^2-4y^2=m\end{cases}\Rightarrow$

$3x^2-8x-16-4m=0$，则 $x_A+x_B=\frac{8}{3}$，$x_Ax_B=-\frac{16+4m}{3}$（*）.

$\because |PA|\cdot|PB|=|PC|^2$，$P,A,B,C$ 共线且 P 在线段

AB 上，

$\therefore (x_P-x_A)(x_B-x_P)=(x_P-x_C)^2$，整理得：$4(x_A+x_B)+x_Ax_B+32=0$，将（$*$）代入上式可解得 $m=28$.

所以，双曲线的方程为 $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{7}=1$.

(2) 由题可设椭圆 S 的方程为：$\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{a^2}=1(a>2\sqrt{7})$.下面我们来求出 S 中垂直于 l 的平行弦中点的轨迹.设弦的两个端点分别为 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，MN 的中点为 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{28}+\frac{y_1^2}{a^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{28}+\frac{y_2^2}{a^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{28}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{a^2}=0.$

由于 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-4$，$x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，所以 $\frac{x_0}{28}-\frac{4y_0}{a^2}=0$，

所以，垂直于 l 的平行弦中点的轨迹为直线 $\frac{x}{28}-\frac{4y}{a^2}=0$ 截在椭圆 S 内的部分.

又由于这个轨迹恰好是 G 的渐近线截在 S 内的部分，所以 $\frac{a^2}{112}=\frac{1}{2}$，即 $a^2=56$，椭圆 S 的方程为 $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{56}=1$.

点评 本题建立在圆、椭圆与双曲线的基础上进行设计，求解时用到了圆锥曲线中很多基础知识与基本技能，如：点到直线的距离公式、通过渐近线方程设双曲线方程、将线段的长度关系转化为坐标关系、韦达定理、点差法等，虽然难度不大，但从知识点的覆盖上看是一道好题.

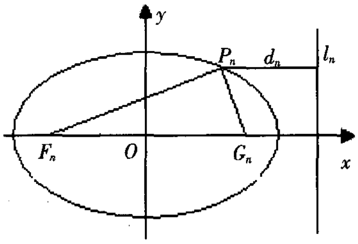
八、结合函数、不等式、导数、数列考查圆锥曲线基本技能的灵活应用

在广东命题的历史上，曾有过将圆锥曲线问题置于函数、导数、不等式之中，求解中不仅要拥有解几的基础知识与常规技能,还要熟练运用导数、函数、不等式.想想今年这种设计会不会再现，我们还是从“宁可信其有”的角度去作好准备吧！

例 8 已知一列椭圆 C_n：$x^2+\frac{y^2}{b_n^2}=1$ $(0<b_n<1,n=1,2,\cdots)$ 若椭圆 C 上有一点 P_n，使 P_n 到直线 l_n：$x=\frac{1}{\sqrt{1-b_n^2}}$ 的距离 d_n 是 $|P_nF_n|$ 与 $|P_nG_n|$ 的等差中项，其中 F_n、G_n 分别是 C_n 的左、右焦点.

（Ⅰ）试证：$b_n\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(n\geqslant1)$；

（Ⅱ）取 $b_n=\frac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，并用 S_n 表示 $\triangle P_nF_nG_n$ 的面积，试证：$S_1<S_2$ 且 $S_n<S_{n+3}$ $(n\geqslant3)$.



解析（Ⅰ）由题设及椭圆的定义，得 $2d_n=|P_nF_n|+|P_nG_n|=2\Rightarrow d_n=1$.设点 P_n 的坐标为 (x_n,y_n)，得 $\frac{1}{\sqrt{1-b_n^2}}-x_n=1\Rightarrow x_n=\frac{1}{\sqrt{1-b_n^2}}-1\Rightarrow-1\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-b_n^2}}-1\leqslant1\Rightarrow\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{1-b_n^2}<1$，

从而对任意 $n\geqslant1$，$b_n\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅱ）设 G_n $(c_n,0)$，则 $c_n^2=1-b_n^2$，由（Ⅰ）得 $x_n=\frac{1}{\sqrt{1-b_n^2}}-1$ 即 $x_n=\frac{1}{c_n}-1$，那么 $y_n^2=b_n^2(1-x_n^2)=(1-c_n^2)[1-(\frac{1}{c_n}-1)^2]$，即 $y_n=\frac{\sqrt{(1-c_n^2)(2c_n-1)}}{c_n}$，

因此 $S_n=\frac{1}{2}\times2c_n\cdot y_n=\sqrt{(1-c_n^2)(2c_n-1)}$，

由 $S_n'=\frac{-3c_n^2+c_n+1}{\sqrt{(1-c_n^2)(2c_n-1)}}$，令 $S_n'=0$，得 $c_n=\frac{1\pm\sqrt{13}}{6}$（负数舍去）；由于 S_n 在 $c_n\in(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{6})$ 时为增函数；在 $c_n\in(\frac{1+\sqrt{13}}{6},1)$ 时为减函数.

由题意，取 $b_n=\frac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，则 $c_n=\sqrt{1-b_n^2}=\frac{n+1}{n+2}$ 是增数列，又知 $c_2=\frac{3}{4}<\frac{1+\sqrt{13}}{6}$ 即 $c_1,c_2\in(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{6})$，于是 $S_1<S_2$. 又 $c_3=\frac{4}{5}>\frac{1+\sqrt{13}}{6}$，即 $n\geqslant3$ 时，$c_n\in(\frac{1+\sqrt{13}}{6},1)$ 于是，可得 $S_n<S_{n+1}$ $(n\geqslant3)$.

点评 本题涉及椭圆的定义、椭圆的几何性质、导函数在函数中的应用及数列的基础知识等，在求解过程中有一点必须提出，也就是引入右焦点的坐标，利用半焦距进行运算，这是本题求解中的一大运算策略，离开这一点可能本题的第二问就无法解答.

圆锥曲线在高考中的命题通常是“一大一小”，今年到底如何？试题是否按我们的设想进行设计，我们将拭目以待.

（作者单位：中山市第一中学）

责任编校 徐国坚