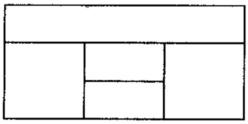
2011年高考统计、概率命题预测

■许少华

统计与概率不仅包括必修三的内容，理科还包括选修 2–3、文科还包括选修 1–2 的第一章.这一内容每年必考，命题方式都是“一小一大”，从广东四年的高考命题情况看，“小题”多出在统计（07、08、09 三年都是如此）方面.“大题”的命题内容与命题形式显得灵活多变，其共性是难度不大、较为基础，是广大考生普遍的得分之题.本文结合 2010 年全国 38 套试题、近四年广东的命题情况及近期获得的各种信息，对 2011 年命题中这一“大题”的设计提出下列六点预测，希望你看了预测之后，能帮助你少走“弯路”，直奔重点.

预测一：通过各类图形给出数据,结合数据产生概率、分布列及均值，此类题的难点在于借助图形求概率.

样题 1. 用红、黄、蓝、白、橙五种不同颜色的鲜花布置如图所示的花圃，要求同一区域上用同一种颜色的鲜花，相邻区域使用不同颜色的鲜花.



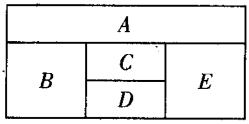
（1）求恰有两个区域用红色鲜花的概率；

（2）记花圃中红色鲜花区域的块数为 X，求 X 的分布列及其数学期望.

解析：（1）设 M 表示事件“恰有两个区域用红色鲜花”，如图，当区域 A、D 同色时，共有 $5\times1\times4\times3\times3=180$ 种；

当区域 A、D 不同色时，共有 $5\times4\times3\times2\times2=240$ 种，

因此，所有基本事件总数为：$180+240=420$ 种.



它们是等可能的.又因为 A、D 为红色时，共有 $4\times3\times3=36$ 种；

B、E 为红色时，共有 $4\times3\times3=36$ 种，

因此，事件 M 包含的基本事件有：$36+36=72$ 种.

所以，恰有两个区域用红色鲜花的概率 $P(M)=\frac{72}{420}=\frac{6}{35}$.

（2）随机变量 X 的取值分别为 0，1，2.

则当 $X=0$ 时，用黄、蓝、白、橙四种颜色来涂色；若 A、D 为同色时，共有 $4\times3\times2\times1\times2=48$ 种；若 A、D 为不同色时，共有 $4\times3\times2\times1\times1=24$ 种，即 $X=0$ 所包含的基本事件有 $48+24=72$ 种，所以 $P(X=0)=\frac{72}{420}=\frac{6}{35}$；

由第（1）问得 $P(X=2)=\frac{72}{420}=\frac{6}{35}$，所以 $P(X=1)=1-\frac{6}{35}-\frac{6}{35}=\frac{23}{35}$.

从而随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{6}{35}$	$\frac{23}{35}$	$\frac{6}{35}$

所以，$EX=0\times\frac{6}{35}+1\times\frac{23}{35}+2\times\frac{6}{35}=1$.

点评：本题求解的关键在于抓住“A、D”或“B、E”两个相对区域的颜色是否相同入手进行分类讨论，对基本事件的产生可借助乘法原理，难度接近广东高考试题的难度.请注意：与图形有关的问题都相当典型，因为图形将所有的信息（有用的与无用的）全部告诉你，在求解问题时，要作适当的选择.看看2010年浙江理科的“管道图”、2010年全国卷2的理科的“电路图”、2010年湖南和广东理科的“频率分布直方图”、还有2009年广东理科的“空气污染笑脸图”等，可谓无奇不有.值得一提的是文科试题的图形多与频率分布直方图有关，看看2010年湖北、安徽、辽宁、陕西文科题都是建立在频率分布直方图的基础“作文章”的.图，是揭示问题的中心；图，是求解问题的关键.抓住图形，要什么有什么.

预测二：通过各种数表，如：数据统计表、频率分布表、概率分布列、即兴设计的其它数表给出数据，借助这些数据结合独立事件或对立事件设计概率及其均值问题.此类题求解的关键在于充分认识数表与合理利用数表.

样题2. 某公司向市场投放三种新型产品，经调查发现第一种产品受欢迎的概率为$\frac{4}{5}$，第二、第三种产品受欢迎的概率分别为p，$q(p>q)$，且不同种产品是否受欢迎相互独立.记ξ为公司向市场投放三种新型产品受欢迎的数量，其分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{2}{45}$	a	d	$\frac{8}{45}$

（Ⅰ）求该公司至少有一种产品受欢迎的概率；

（Ⅱ）求p，q的值；

（Ⅲ）求数学期望$E\xi$.

解析：设事件A_i表示“该公司第i种产品受欢迎”，$i=1,2,3$，由题意知$P(A_1)=\frac{4}{5}$，$P(A_2)=p$，$P(A_3)=q$.

（Ⅰ）由于事件“该公司至少有一种产品受欢迎”与事件“$\xi=0$”是对立的，所以该公司至少有一种产品受欢迎的概率是$1-P(\xi=0)=1-\frac{2}{45}=\frac{43}{45}$.

（Ⅱ）由题意知$P(\xi=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})$，$\frac{1}{5}(1-p)(1-q)=\frac{2}{45}$，$P(\xi=3)=P(A_1A_2A_3)=\frac{4}{5}pq=\frac{8}{45}$，整理得$pq=\frac{2}{9}$且$p+q=1$，由$p>q$，可得$p=\frac{2}{3}$，$q=\frac{1}{3}$.

（Ⅲ）由题意知$a=P(\xi=1)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{4}{5}(1-p)(1-q)+\frac{1}{5}p(1-q)+\frac{1}{5}(1-p)q=\frac{13}{45}$，$b=P(\xi=2)=1-P(\xi=0)-P(\xi=1)-P(\xi=3)=\frac{22}{45}$，

因此，$E\xi=0\times P(\xi=0)+1\times P(\xi=1)+2\times P(\xi=2)+3\times P(\xi=3)=\frac{27}{15}$.

点评：本题建立在分布列的基础上通过对立事件与独立事件进行设计，难度不大，但考查的基础知识与基本技能较为全面.文科建立在数表的基础上出现的考题也相当多，其中统计表、频率分布表最为常见，除了考查统计的有关知识之外，还会考查古典概型概率的计算.

预测三：依据游戏进行设计，由于游戏具有背景公平、构思新颖、内容丰富等特点，因此，它成了设计高考试题的重要资源.看看2010年全国各地的试题，江西的迷宫通道、山东的知识竞赛、重庆的“唱读讲传”等都具有游戏的特点.据此，我们说游戏可能是2011年命题的素材之一.

样题3. 某种电脑游戏分为多道关口，游戏者逐级闯关，第一关：点击“开始”后,电脑记分器显示游戏者拥有10分的游戏底分,游戏者必须按顺序对①恐怖分子的汽车、②恐怖分子头目（头目在恐怖分子中有特殊记号）、③恐怖分子的坦克、④恐怖分子的飞机，各发一枚炮弹，若击中，可分别加1分、2分、3分、6分，若有一个未击中，则减2分（最多可减8分）.每发一枚炮弹，计分器都会显示累计分数.当累计分数小于8分时，游戏结束，淘汰出局.当累计分数大于或等于14分时，进入下一关.若四枚炮弹发完，累计分数不足14分时，游戏结束，淘汰出局.

假设某人按顺序击中的概率分别为$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，且各次击中与否相互独立.

（1）求该人能进入下一关的概率.

（2）用ξ表示该人在游戏结束时开炮的次数，求ξ的分布列及均值$E\xi$.

解析：用M_1，M_2，M_3，M_4分别表示①②③④被击中的事件，则$P(M_1)=\frac{3}{4}$，$P(M_2)=\frac{1}{2}$，$P(M_3)=\frac{1}{3}$，$P(M_4)=\frac{1}{4}$；用N_1，N_2，N_3，N_4分别表示①②③④未被击中的事件，则$P(N_1)=\frac{1}{4}$，$P(N_2)=\frac{1}{2}$，$P(N_3)=\frac{2}{3}$，$P(N_4)=\frac{3}{4}$.

(1) 记"该人能进入下一关"为事件 Q，则 $P(Q)=P(M_1M_2M_3+N_1M_2M_3M_4+M_1N_2M_3M_4+M_1M_2N_3M_4+N_1M_2N_3M_4)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

(2) 由题意知 ξ 的可取值分别为：2，3，4，那么

$P(\xi=2)=P(N_1N_2)=P(N_1)P(N_2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$；

$P(\xi=3)=P(M_1M_2M_3)+P(M_1N_2N_3)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{8}$；

$P(\xi=4)=1-P(\xi=2)-P(\xi=3)=1-\frac{1}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$.

于是，ξ 的分布列如下：

ξ	2	3	4
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$

则 $E\xi=2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{1}{2}=\frac{27}{8}$.

点评：电脑游戏已普及到千家万户，从幼儿园的娃娃到六七十岁的老者，都有适合的游戏种类，因此，这个背景可以说都很熟悉，当然最公平.本题借助电脑游戏，结合独立事件的概率进行设计，新颖别致、独具风味.

预测四：依据其它章节知识进行设计，概率、统计与数学的其它章节的知识联系十分密切.看看 2010 年各地试题：山东利用不等式结合古典概型、福建（文）利用向量运算结合古典概型、福建（理）结合一元二次不等式的解.因此，我们有理由预测结合其它章节的知识设计高考试题将有较大的可能性.

样题 4. 一个盒子装有六张卡片，上面分别写着如下六个定义域为 R 的函数：$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$，$f_4(x)=\sin x$，$f_5(x)=\cos x$，$f_6(x)=\lg(|x|+1)$.

(Ⅰ) 现从盒子中任取两张卡片，将卡片上的函数相加得一个新函数，求所得函数是奇函数的概率；

(Ⅱ) 现从盒子中进行逐一抽取卡片，且每次取出后均不放回，若取到一张记有偶函数卡片则停止抽取，否则继续进行，求抽取次数 ξ 的分布列和数学期望.

解析：(Ⅰ) 由于六个函数中只有 $f_1(x)$、$f_3(x)$、$f_4(x)$ 为奇函数，另三个为偶函数，只有当两函数都是奇函数时，新函数才是奇函数.于是，计事件 A 为"任取两张卡片，将卡片上的函数相加得到的函数是奇函数"，那么 $P(A)=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{1}{5}$.

(Ⅱ) 由题意得 ξ 可取 1，2，3，4.且 $P(\xi=1)=\frac{C_3^1}{C_6^1}=\frac{1}{2}$；$P(\xi=2)=\frac{C_3^1}{C_6^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{10}$；$P(\xi=3)=\frac{C_3^1}{C_6^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{3}{20}$；

$P(\xi=4)=\frac{C_3^1}{C_6^1}\cdot\frac{C_2^1}{C_5^1}\cdot\frac{C_1^1}{C_4^1}\cdot\frac{C_3^1}{C_3^1}=\frac{1}{20}$，

故 ξ 的分布列为：

ξ	1	2	3	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$

$E\xi=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{3}{20}+4\times\frac{1}{20}=\frac{7}{4}$，即 ξ 的数学期望为 $\frac{7}{4}$.

点评：本题与函数的性质结合，要正确求解，首先必须准确的判断六个函数的奇偶性，其次对两奇、偶函数的和函数的奇、偶性也要十分清楚，否则，很难完成求解.当然，本题不是难题，特别适合广东的考生.

预测五：结合工农业生产的实际进行设计，概率、统计的应用性决定了它与工农业生产结合的紧密性.新课标对应用意识的要求十分明确：能综合应用所学数学知识、思想和方法解决相关学科、生产、生活中简单的数学问题；能对问题陈述的材料、提供的信息资料进行归纳、整理和分类，将实际问题抽象为数学问题，并加以解决.2010 年江苏、广东及 2008 年广东都从这个角度设计了试题，2011 年呢？也具有很大的可能性.

样题 5. 某市为鼓励企业发展"低碳经济"，真正实现"低消耗、高产出"，施行奖惩制度.通过制定评分标准，每年对本市 50% 的企业抽查评估，评出优秀、良好、合格和不合格四个等次，并根据等级给予相应的奖惩（如下表）.某企业投入 100 万元改造，由于自身技术原因，能达到以上四个等次的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{24}$，且由此增加的产值分别为 60 万元、40 万元、20 万元、-5 万元.设该企业当年因改造而增加利润为 ξ.

(Ⅰ) 在抽查评估中，该企业能被抽到且被评为合格及其以上等次的概率是多少？

(Ⅱ) 求 ξ 的数学期望.

评估得分	(0,60)	[60,70)	[70,80)	[80,100)
评定等级	不合格	合格	良好	优秀
奖惩（万元）	−80	30	60	100

解析：（Ⅰ）设该企业能被抽中的概率且评为合格以上等次的概率为 P，则 $P=(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8})\times\frac{1}{2}=\frac{23}{48}$.

（Ⅱ）依题意，ξ 的可能取值为则 $-185,-105,-80,-60,-50,-40,0,60$，则 $P(\xi=60)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(\xi=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(\xi=-50)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，$P(\xi=-185)=\frac{1}{24}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$，$P(\xi=-40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，$P(\xi=-60)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$P(\xi=-80)=\frac{1}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$，$P(\xi=-105)=\frac{1}{24}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$，其分布列为：

ξ	-185	-105	-80	-60	-50	-40	0	60
P	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$\therefore E\xi=(60-40)\times\frac{1}{4}+(-60)\times\frac{1}{6}+(-50-80)\times\frac{1}{16}+(-185-105)\times\frac{1}{48}=-\frac{115}{6}$ 万元.

点评： *本题结合当前热点，从社会对企业“低消耗、高产出”的环保要求进行设计.第一问较简单，第二问的求解有难度，对于该企业是否被“抽到”？最终的利润是不同的.无论是“合格”“优良”“不合格”“优秀”都存在两种可能，这一点也许是很多考生容易忽略的地方.*

预测六：结合新定义进行创新设计，以概率统计为依托，命制新背景、新定义、新运算、新性质等的创新题型，考查考生创新能力与创新意识.由于概率统计本身具有应用性与灵活性，又加上创新问题还存在着捕捉信息与处理信息的能力.因此，创新设计的试题往往有一定的难度，很多考生望而生畏.

样题 6. 将编号为 1、2、3、4 的四个小球随机的放入编号为 1、2、3、4 的四个纸箱中，每个纸箱有且只有一个小球，称此为一轮“放球”.设一轮“放球”后编号为 $i(i=1,2,3,4)$ 的纸箱放入的小球编号为 a_i，定义吻合度误差为 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$.

（Ⅰ）写出吻合度误差 X 的可能值集合；

（Ⅱ）假设 a_1，a_2，a_3，a_4 等可能地为 1,2,3,4 的各种排列，求吻合度误差 X 的分布列；

（Ⅲ）某人连续进行了四轮“放球”，若都满足 $3<X<7$，试按（Ⅱ）中的结果，计算出现这种现象的概率（假定各轮“放球”相互独立）.

解析：（1）由于在 1、2、3、4 中奇数与偶数各有两个，所以 a_2，a_4 中的奇数的个数与 a_1，a_3 中偶数的个数相同.因此，$|1-a_1|+|1-a_3|$ 与 $|1-a_2|+|1-a_4|$ 的奇偶性相同，从而吻合度误差 $X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$ 只能是偶数，又因为 X 的值非负且值不大于 8. 因此，吻合度误差 X 的可能值集合 $\{0,2,4,6,8\}$.

（2）用 (a_1,a_2,a_3,a_4) 表示编号为 1、2、3、4 的四个纸箱中放入的小球编号分别为 a_1,a_2,a_3,a_4，则所有可能的结果如下：

(1,2,3,4) (1,2,4,3) (1,3,2,4) (1,3,4,2) (1,4,3,2) (1,4,2,3)

(2,1,3,4) (2,1,4,3) (2,3,1,4) (2,3,4,1) (2,4,3,1) (2,3,1,4)

(3,1,2,4) (3,1,4,2) (3,2,1,4) (3,2,4,1) (3,4,2,1) (3,4,1,2)

(4,1,2,3) (4,1,3,2) (4,2,1,3) (4,2,1,3) (4,3,2,1) (4,3,1,2)

易得 $P(X=0)=\frac{1}{24}$，$P(X=2)=\frac{3}{24}$，$P(X=4)=\frac{7}{24}$，$P(X=6)=\frac{9}{24}$，$P(X=8)=\frac{4}{24}$.

于是，吻合度误差 X 的分布列如下：

ξ	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{4}{24}$

（3）首先，$P(3<X<7)=P(X=4)+P(X=6)=\frac{7}{24}+\frac{9}{24}=\frac{2}{3}$.

由上述结果和独立性假设，可得出现这种现象的概率为 $P=(\frac{2}{3})^4=\frac{16}{81}$.

点评： *本题建立在新定义“吻合度误差”的基础上设计，通过吻合度误差的可能值、分布列等展开，有一定难度.但，细想一下，也不过如此.第一问，就是加法与减法，数字也不大.第二问用到列举基本事件，通过古典概型产生分布列中的各种情况的概率.第三问考查独立重复试验的概率.各问之间层次分明且互为利用，是一道难得的好题.*

概率与统计是一个必考内容，命题方式与命题类型决定了试题的难易度.我们想：从背景、从试题结构、从难度等，不会超出上述我们的预测，希望结果与我们预测的“吻合度误差”会很小.

（作者单位：中山市第一中学）

责任编校　徐国坚