2011年广东高考立几试题预测

■许少华

高考数学，考什么？怎么考？首先我们需要明白其方向性问题.高考数学命题的“题根”在于：挖掘现行教材；高考数学命题的“要求”在于：理解《考试大纲》；高考数学命题的“规律”在于：探究往年真题；高考数学命题的“趋势”在于：研究考试题型的“不动点”“热点”“冷点”和“亮点”.高考是人生的一次经历，是对人的一次磨练，是对人的智能极限的挑战，更是一次人生新的选择.如何笑傲考场、决胜高考?这需要我们熟悉高考的知识清单，明确高考的命题规律，把握高考解题的思想方法和能力要求，以便提升应对高考复习的效率.

立体几何近两年的考试情况如下：

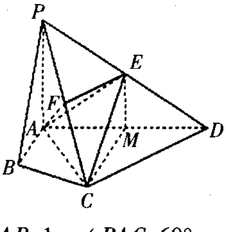
年份	2009年	2010年
考查内容	理科以正方体为载体几何体的体积、线线、线面的位置关系、空间角等知识，属于中档综合题，本题求解的难点在于准确的识图.文科建立在三视图的基础上考查体积与线面位置关系.	理科主要考查线线、线面、面面的位置关系、空间角和距离的概念、空间向量及坐标运算等知识,考查数形结合、化归与转化的数学思想方法,以及空间想象能力、推理论证能力和运算求解能力.文科试题建立在理科试题的基础上稍作改编而产生.

看着过去,想着未来.对下2011年的立几试题的命题，我们主要看下列四个方面：

预测1、多面体规范求解步骤

以多面体为依托，设计多问的形式，既考查线线、线面、面面的位置关系，也考查空间角、空间距离、面积、体积等度量关系，其解题步骤遵循“作——证——求”的基本规范，强调作图、证明和计算相结合的“三合一”步骤.

样题1. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle ABC=\angle ACD=90°$，$\angle BAC=\angle CAD=60°$，$PA\perp$平面$ABCD$，$E$为$PD$的中点，$PA=2AB=2$.



（Ⅰ）求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 V；

（Ⅱ）若 F 为 PC 的中点，求证 $PC\perp$平面AEF；

（Ⅲ）求证 $CE//$平面PAB.

解析:（Ⅰ）在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AB=1$，$\angle BAC=60°$，

$\therefore BC=\sqrt{3}$，$AC=2$.

在 $Rt\triangle ACD$ 中，$AC=2$，$\angle CAD=60°$，$\therefore CD=2\sqrt{3}$，$AD=4$.

$\therefore S_{ABCD}=\frac{1}{2}AB\cdot BC+\frac{1}{2}AC\cdot CD=\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}+\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$，则 $V=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}\sqrt{3}\times2=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

（Ⅱ）$\because PA=CA$，F为PC的中点，$\therefore AF\perp PC$.

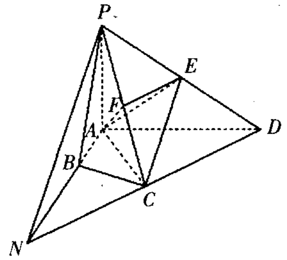
$\because PA\perp$平面$ABCD$，$\therefore PA\perp CD$.

$\because AC\perp CD$，$PA\cap AC=A$，$\therefore CD\perp$平面PAC，$\therefore CD\perp PC$.

$\because E$为PD中点，F为PC中点，$\therefore EF//CD$，则$EF\perp PC$.

$\because AF\cap EF=F$，$\therefore PC\perp$平面AEF.

（Ⅲ）证法一：取AD中点M，连EM，CM.则$EM//PA$.



$\because EM\not\subset$平面PAB，$PA\subset$平面PAB，$\therefore EM//$平面PAB.在$Rt\triangle ACD$中，$\angle CAD=60°$，$AC=AM=2$，$\therefore\angle ACM=60°$.而$\angle BAC=60°$，$\therefore MC//AB$.

$\because MC\not\subset$平面PAB，$AB\subset$平面PAB，$\therefore MC//$平面PAB.

$\because EM\cap MC=M$，$\therefore$平面$EMC//$平面PAB.$\because EC\subset$平面EMC，$\therefore EC//$平面PAB.

证法二：

延长DC、AB，设它们交于点N，连PN.

$\because\angle NAC=\angle DAC=60°$，$AC\perp CD$，$\therefore C$为$ND$的中点.

$\because E$为PD中点，$\therefore EC//PN$.

$\because EC\not\subset$平面PAB，$PN\subset$平面PAB，$\therefore EC//$平面PAB.

点评： 此题难度与近四年广东高考题的难度基本一致，类型也基本相当，在论证中平几也得到了较多的应用，若将本题作一下改动，第二问变为第一问，新增第二问“求三角形的面积”；第三问保留，也许更向广东考题.本题还可以再做些改动，将条件中“$\angle BAC=\angle CAD=60°$”，改为“$\angle BAC=60°$，$AD=2AC$”

其它不变，这样正好出现了 AD,AB,AP 两两垂直的情况，求解可以利用空间向量的坐标表示来完成.

预测 2、三视图玩转几何体

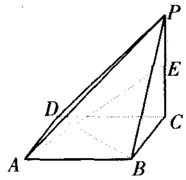
以三视图为依托，将几何体中的线线位置关系及线段的数量关系通过三视图体现出来.借助这些既暴露又隐藏的关系产生垂直、平行的论证及表面积、体积的计算问题.

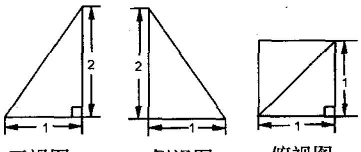
样题 2. 已知一四棱锥 P-$ABCD$ 的三视图如下，E是侧棱 PC 上的动点.

(1) 求四棱锥 P-$ABCD$ 的体积；

(2) 是否不论点 E 在何位置，都有 $BD\perp AE$？证明你的结论；

(3) 若点 E 为 PC 的中点，求二面角 D-AE-B 的大小.





正视图　侧视图　俯视图

解析： (1) 由该四棱锥的三视图可知，该四棱锥 P-$ABCD$ 的底面是边长为 1 的正方形，侧棱 $PC\perp$ 底面 $ABCD$，且 $PC=2$，$\therefore V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}S_{\square ABCD}\cdot PC=\frac{2}{3}$.

(2) 不论点 E 在何位置，都有 $BD\perp AE$，证明如下：连结 AC，$\because ABCD$ 是正方形，$\therefore BD\perp AC$，$\because PC\perp$ 底面 $ABCD$ 且 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore BD\perp PC$.

又 $\because AC\cap PC=C$，$\therefore BD\perp$ 平面 PAC.

$\because$ 不论点 E 在何位置，都有 $AE\subset$ 平面 PAC.

$\therefore$ 不论点 E 在何位置，都有 $BD\perp AE$.

(3) 解法 1：在平面 DAE 内过点 D 作 $DG\perp AE$ 于 G，连结 BG，

$\because CD=CB,EC=EC$，$\therefore \mathrm{Rt}\triangle ECD\cong \mathrm{Rt}\triangle ECB$.

$\therefore ED=EB$，$\because AD=AB$，$\therefore \triangle EDA\cong\triangle EBA$.

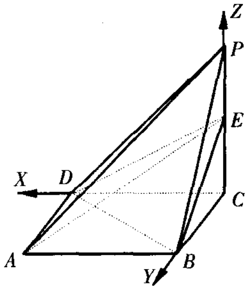
$\therefore BG\perp EA$，$\therefore \angle DGB$ 为二面角 D-EA-B 的平面角.

$\because BC\perp DE$，$AD/\!/BC$，$\therefore AD\perp DE$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中 $DG=\frac{AD\cdot DE}{AE}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=BG$.

在 $\triangle DGB$ 中，由 $\cos\angle DGB=\frac{DB^2+BG^2-BD^2}{2DB\cdot BG}=-\frac{1}{2}$，

$\therefore \angle DGB=\frac{2\pi}{3}$.

解法 2： 以点 C 为坐标原点，CD 所在的直线为 x 轴建立空间直角坐标系如下图所示，则 $D(1,0,0)$，$A(1,1,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,0,1)$，从而 $\overrightarrow{DE}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{DA}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{BA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,-1,1)$. 设平面 ADE 和平面 ABE 的法向量分别为 $\vec{m}=(a,b,c)$，$\vec{n}=(a',b',c')$.



由法向量的性质可得：$-a+c=0,b=0,a'=0,-b'+c'=0$. 令 $c=1,c'=-1$，则 $a=1,b'=-1$，$\therefore$ $\vec{m}=(1,0,1)$，$\vec{n}=(0,-1,-1)$.

设二面角 D-AE-B 的平面角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=-\frac{1}{2}$，$\therefore \theta=\frac{2\pi}{3}$.

点评： 三视图是高考的热点，在广东新课标的四年高考中，年年都考. 2007 年与 2009 年文科都出现在解答题之中，理科会在解答题中出现吗？也许就在不远的将来.本题通过三视图，将几何体的有关量与关系统统用三视图给出，通过对图形的观察与分析产生必要的条件，借助这些条件证明与求解问题.

预测 3、组合体空间线面巧构图

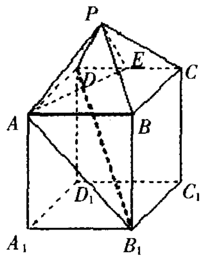
以组合体为依托，建立在"复杂图形"的基础上，利用不同属于一个基本几何体的线线关系与线面关系设计试题.利用组合体结构的特殊性产生线面位置关系的判断与论证、成角及有关面积与体积的计算等，难度不大，识图与用图的要求不低.

样题 3. 如图，在组合体中 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是一个长方体，P-$ABCD$ 是一个四棱锥.$AB=2$，$BC=3$，点 $P\in$ 平面 CC_1D_1D 且 $PD=PC=\sqrt{2}$.

(Ⅰ) 证明：$PD\perp$ 平面 PBC；

(Ⅱ) 求 PA 与平面 $ABCD$ 所成的角的正切值；

(Ⅲ) 若 $AA_1=a$，当 a 为何值时，$PC/\!/$平面 AB_1D.



解析一： (Ⅰ) 因为 $PD=PC=\sqrt{2}$，$CD=AB=2$，所以 $\triangle PCD$ 为等腰直角三角形，所以 $PD\perp PC$.

因为 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 是一个长方体，所以 $BC\perp$ 面 CC_1D_1D，而 $P\in$ 平面 CC_1D_1D，所以 $PD\subset$ 面 CC_1D_1D，得 $BC\perp PD$.

因为 PD 垂直于平面 PBC 内的两条相交直线 PC 和 BC，由线面垂直的判定定理，可得 $PD\perp$ 平面 PBC.

(Ⅱ) 过 P 点在平面 CC_1D_1D 作 $PE\perp CD$ 于 E，连接 AE，

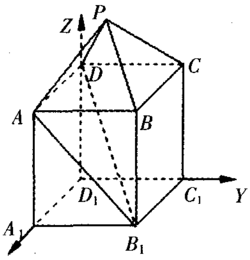
因为面 $ABCD\perp$ 面 PCD，所以 $PE\perp$ 面 $ABCD$，所

以$\angle PAE$就是PA与平面$ABCD$所成的角，因为$PE=1$，$AE=\sqrt{10}$，所以$\tan\angle PAE=\frac{PE}{AE}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

所以PA与平面$ABCD$所成的角的正切值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(Ⅲ) 当$a=2$时，四边形CC_1D_1D是一个正方形，所以$\angle C_1DC=45°$，而$\angle PDC=45°$，得$\angle PDC_1=90°$，即$C_1D\perp PD$，而$PC\perp PD$，C_1D与PC在同一个平面内，所以$PC/\!/C_1D$.

由于$C_1D\subset$面AB_1C_1D，所以$PC/\!/$面AB_1C_1D，即$PC/\!/$平面AB_1D.



解析二:(Ⅰ)如图建立空间直角坐标系，设棱长$AA_1=a$，则有$D(0,0,a)$，$P(0,1,a+1)$，$P(3,2,a)$，$C(0,2,a)$.

于是$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{PB}=(3,1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，所以$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{PC}=0$.

所以PD垂直于平面PBC内的两条相交直线PC和BC，由线面垂直的判定定理，可得$PD\perp$平面PBC.

(Ⅱ) 由于$A(3,0,a)$，得$\overrightarrow{PA}=(3,-1,-1)$，而平面$ABCD$的一个法向量为$\vec{n_1}=(0,0,1)$，设$PA$与平面$ABCD$所成的角为$\theta$，那么$\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PD},\vec{n_1}>|=|\frac{-1}{\sqrt{11}\times1}|=\frac{\sqrt{11}}{11}\Rightarrow\tan\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故PA与平面$ABCD$所成的角的正切值为$\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(Ⅲ)由$B_1(3,2,0)$，得$\overrightarrow{DA}=(3,0,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,-a)$.设面$AB_1D$的法量为$\vec{n_2}=(x,y,z)$，由$\overrightarrow{DA}\cdot\vec{n_2}=0$得$x=0$；由$\overrightarrow{AB_1}\cdot\vec{n_2}=0$得$2y=az$；令$z=2$，可得平面$AB_1D$的一个法向量为$\vec{n_2}=(0,a,2)$，若$PC/\!/$平面$AB_1D$，则$\overrightarrow{PC}\perp\vec{n_2}$，即$\overrightarrow{PC}.\vec{n_2}=a-2=0$，解得$a=2$，所以当$a=2$时，$PC/\!/$平面$AB_1D$.

点评：此题可以稍作改动变成文科试题，只需将$AA_1=2$在题目条件中直接给出，然后将第二问变为求三棱锥$P-AB_1D$(答案为：2)，第三问变为证明$PC/\!/$平面AB_1D即可；对于理科，这是一道好题，可以看出既可以用传统方法，也可以用空间向量方法，且两法难易、繁简都相当.

预测4、平面翻折开创图形新天地

以平面图形的翻折为依托，将平面图形的部分折起构成空间图形，以此产生线线关系、线面关系、面面关系以及各种数量关系.由于平面图形翻折的部分具有随意性，因此，翻后的空间图形具有很大的灵活性与不规则性，可根据需要进行各种设计，2010年浙江理（文）科题折起矩形的一角设计求二面角与线段长、2010年江西理科题由两个不共面的三角形，让其一边重合设计求点到面的距离及二面角，广东呢？会不会不远了.我们欣赏一题：

样题4. 在正三角形ABC中，E，F，P分别是AB，AC，BC边上的点，满足$\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FA}=\frac{CP}{PB}=\frac{1}{2}$（如图1）.将$\triangle AEF$沿$EF$折起到$\triangle A_1EF$的位置，使二面角$A_1-EF-B$成直二面角，连结$A_1B$，$A_1P$(如图2)

(Ⅰ) 求证：$A_1E\perp$平面BEP;

(Ⅱ) 求直线A_1E与平面A_1BP所成角的大小；

(Ⅲ) 求二面角$B-A_1P-F$的余弦值.

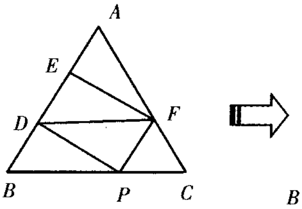


图1

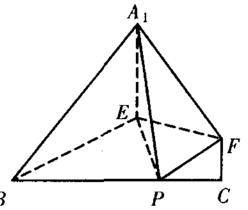


图2

解析：不妨设正三角形ABC的边长为3，则：

(1) 在图1中，取BE中点D，连结DF，则$\because\frac{AE}{EB}=\frac{CF}{FA}=\frac{CP}{PB}=\frac{1}{2}$，$\therefore AF=AD=2$，而$\angle A=60°$，即$\triangle ADF$是正三角形.

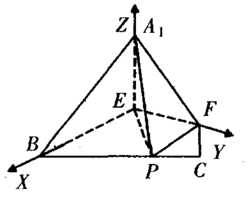
又$\because AE=ED=1$，$\therefore EF\perp AD$，$\therefore$在图2中有$A_1E\perp EF$，$BE\perp EF$，

$\therefore\angle A_1EB$为二面角A_1-EF-B的平面角.

$\because$二面角A_1-EF-B为直二面角，$\therefore A_1E\perp BE$，

$\therefore A_1E\perp$平面BEF，即$A_1E\perp$平面BEP.

(2) 由 (1) 问可知$A_1E\perp$平面BEP，$BE\perp EF$，建立如图的坐标系，则$E(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B(2,0,0)$，$F(0,\sqrt{3},0)$.



在图1中，不难得到$EF/\!/DP$且$EF=DP$；$DF/\!/FP$且$DE=FP$，故点P的坐标$P(1,\sqrt{3},0)$，设直线A_1E与平面A_1BP所成角为θ.

$\therefore\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-1)$，$\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{EA_1}=(0,0,1)$.

不妨设平面A_1BP的法向量$\vec{n}_1=(x,y,z)$，则

解析几何与其它知识的交汇专题复习

■洪其强

一、解析几何与平面向量的交汇

平面向量是高中数学的新增内容，也是新高考的一个亮点.它具有代数形式和几何形式的“双重身份”，能融数形于一体，形成知识交汇点.而在高中数学体系中，解析几何占有着很重要的地位，有些问题用常规方法去解决往往运算比较繁杂，不妨运用向量作形与数的转化，则会大大简化过程.

在近年的高考试卷中，解析几何大题与向量综合，主要涉及到向量的点乘积（以及用向量的点乘积求夹角）和定比分点等，因此，与向量综合，仍是解析几何的热点问题，预计在2011年的高考试题中，这一现状依然会持续下去.

例1 在直角坐标平面中，$\triangle ABC$的两个顶点为$A(0,-1)$，$B(0,1)$平面内两点G、M同时满足①$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$，②$|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|=|\overrightarrow{MC}|$，③$\overrightarrow{GM}\parallel\overrightarrow{AB}$.

(1) 求顶点C的轨迹E的方程.

(2) 设P、Q、R、N都在曲线E上，定点F的坐标为$(\sqrt{2},0)$，已知$\overrightarrow{PF}\parallel\overrightarrow{FQ}$，$\overrightarrow{RF}\parallel\overrightarrow{FN}$且$\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{RF}=0$.求四边形$PRQN$面积S的最大值和最小值.

分析 本例（1）要熟悉用向量的方式表达点特征；（2）要把握好直线与椭圆的位置关系，弦长公式，灵活的运算技巧是解决好本题的关键.

解析 (1) 设$C(x,y)$，$\because\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GO}$，由①知$\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GO}$，$\therefore G$为$\triangle ABC$的重心，$\therefore G(\frac{x}{3},\frac{y}{3})$.由②知$M$是$\triangle ABC$的外心，$\therefore M$在$x$轴上.

由③知$M(\frac{x}{3},0)$，由$|\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{MA}|$得$\sqrt{(\frac{x}{3})^2+1}=\sqrt{(x-\frac{x}{3})^2+y^2}$，化简整理得：$\frac{x^2}{3}+y^2=1\ (x\neq0)$.

(2) $F(\sqrt{2},0)$恰为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的右焦点，设PQ的斜率为$k\neq0$且$k\neq\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，则直线$PQ$的方程为$y=k(x-\sqrt{2})$，

由$\begin{cases}y=k(x-\sqrt{2}),\\x^2+3y^2-3=0\end{cases}\Rightarrow(3k^2+1)x^2-6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0.$

$\begin{cases}\overrightarrow{A_1B}\cdot\vec{n}_1=2x-z=0,\\\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}_1=-x+\sqrt{3}y=0.\end{cases}$ 令$y=\sqrt{3}$，得$\vec{n}_1=(3,\sqrt{3},6)$，

$\therefore\sin\theta=|\cos<\vec{n}_1,\overrightarrow{EA_1}>|=|\frac{\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{EA_1}}{|\vec{n}_1|\cdot|\overrightarrow{EA_1}|}|=|\frac{6}{1\times4\sqrt{3}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故直线A_1E与平面A_1BP所成角的大小为$\frac{\pi}{3}$.

(3) 由（2）知平面A_1BP的法向量$\vec{n}_1=(3,\sqrt{3},6)$，又$\overrightarrow{A_1F}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{FP}=(1,0,0)$.设平面$A_1PF$的法向量$\vec{n}_2=(x,y,z)$，则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1F}\cdot\vec{n}_2=\sqrt{3}y-z=0,\\\overrightarrow{BP}\cdot\vec{n}_1=x=0.\end{cases}$

令$y=\sqrt{3}$，得$\vec{n}_2=(0,\sqrt{3},3)$，故$\cos<\vec{n}_1,\vec{n}_2>=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{21}{4\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\frac{7}{8}$.

结合图形，可得二面角$B-A_1P-F$为钝角，故二面角$B-A_1P-F$的余弦值为$-\frac{7}{8}$.

点评：求解翻折问题的策略是：（1）分析翻折前后点的变化，注意点与点的重合问题以及点的位置的改变；（2）分析翻折前后长度与角度的变化，注意利用平面图形解决空间的线段长度以及空间角的大小；（3）若翻折后，线与线仍同在一个平面内，则它们的位置关系不发生任何变化；若翻折后，线与线由同一平面转为不同平面，则应特别注意点的位置变化.本题在翻折前的图1中易证$EF\perp AB$，而翻折后保持这一垂直关系，并且易证$A_1E\perp BE$，从而有“三条直线两两垂直”，所以本例可以建立坐标系，利用空间向量求解.

立体几何着重考查空间想象能力，最后我们强调“四会”：①会画图——根据题设条件画出适合题意的图形或画出自己想做的辅助线，画出图形要直观、虚实分明；②会识图——根据题目给出的图形.想象出立体的形状和有关线面的位置关系；③会拆图——对图形进行必要的分解、组合；④会用图——对图形或其某部分进行平移、翻折、旋转、展开或实行割补术.

（作者单位：中山市第一中学）

责任编校　徐国坚