2011年高考三角试题预测

■许少华

横看全国各省市，纵观广东近四年，猜测三角部分在2011年高考解答题的命题中仍会命一题，且此题难度不大，属基础题或是中档偏下的题，难度系数为0.7左、右，是广大考生普遍得分的题. 此题在试卷中的位置比较靠前，应该是解答题的第一题或第二题. 快速、准确地求解此题，对顺利完成全卷无论是从心理上还是从时间上都将起到很重要作用. 为此，本文探讨一下三角题的命题趋势，从可能设计的方向进行预测，希望对你最后的复习有所帮助.

预测1、结合化归思想，考查三角函数性质

利用倍角公式、降幂分式及两角和与差的三角函数公式将给出的三角函数式化为一个角的三角函数，借助三角函数的图像及性质产生结论.

样题1. $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2x$.

(1)求$f(x)$的最大值及最小正周期；

(2)求使$f(x)\geqslant 2$的x的取值范围.

解析：(1)$\because f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\sin(2x-\frac{\pi}{6})+2\cos^2x$

$=\sin2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos2x\sin\frac{\pi}{6}+\sin2x\cos\frac{\pi}{6}-\cos2x\sin\frac{\pi}{6}+2\cos2x+1$

$=\sqrt{3}\sin2x+\cos2x+1$

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1$,

$\therefore$ 当$\sin(2x+\frac{\pi}{6})=1$时，$f(x)_{\max}=2+1=3$，$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$\because f(x)\geqslant 2$, $\therefore 2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+1\geqslant 2$, $\therefore \sin(2x+\frac{\pi}{6})\geqslant\frac{1}{2}$.

$\therefore 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}$，$\therefore k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$ $(k\in Z)$,

$\therefore f(x)\geqslant 2$的$x$的取值范围是$\{x|\,k\pi\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in Z\}$.

点评：化为一个角的三角函数是三角函数的重要方法也是近年高考反复考查的内容，必须引起我们的重视.

预测2、结合函数图像，考查图像及其性质

结合图像特征，考查三角函数的性质. 由于三角函数图像及其性质是三角函数的重要内容，也是各类考试常考的内容. 命题方式灵活，常见命题形式有二：其一，给出图像特征，求解析式，进一步考查函数性质；其二，借助其它知识给出函数解析式，将函数图像性质及函数作图溶为一体，重在利用函数性质考查函数作图.

样题2. 已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图像在$y$轴上的截距为1，在相邻两最值点$(x_0,2)$，$(x_0+\frac{3}{2},-2)(x_0>0)$上$f(x)$分别取得最大值和最小值.

(1) 求$f(x)$的解析式；

(2) 若函数$g(x)=af(x)+b$的最大值和最小值分别为6和2，求a,b的值.

解析：(1) 由题意知$A=2$，$\frac{T}{2}=(x_0+\frac{3}{2})-x_0=\frac{3}{2}$,

$\therefore T=3$，即$\frac{2\pi}{\omega}=3$，$\omega>0$，$\therefore \omega=\frac{2\pi}{3}$.

$\therefore f(x)=2\sin(\frac{2\pi}{3}x+\omega)$过点$(0,1)$，代入得$2\sin\varphi=1$,

而$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi=\frac{\pi}{6}$，$\therefore f(x)=2\sin(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$.

(2) 若$g(x)=af(x)+b=2a\sin(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})+b$.

若$a>0$，由已知得$\begin{cases}2a+b=6,\\2a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=4.\end{cases}$

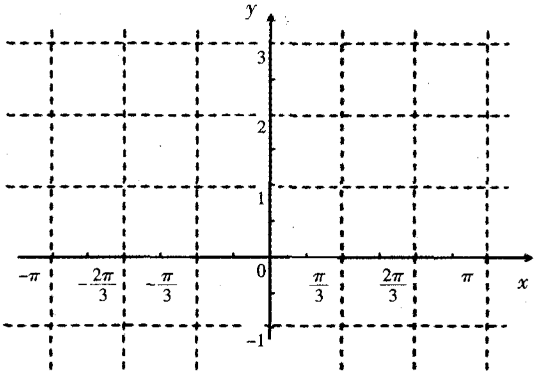
若$a<0$，由已知得$\begin{cases}-2a+b=6,\\2a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1,\\b=4,\end{cases}$ $\therefore a=\pm1$, $b=4$.

点评：本题借助于图像特征产生了$y=A\sin(\omega x+\varphi)$

中的相应参数，注意这里的求解方法具有一般性，对类似问题的求解有较大的启发性.

样题3. 已知$\vec{a}=2(\cos\omega x,\cos\omega x)$，$\vec{b}=(\cos\omega x,\sqrt{3}\sin\omega x)$(其中$0<\omega<1$)，函数$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}$，若直线$x=\frac{\pi}{3}$是$f(x)$图像的一条对称轴.

(1) 试求ω的值；



(2)先列表再作出函数$f(x)$在区间$[-\pi,\pi]$上的图像.

解析： 由于$f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}=2(\cos\omega x,\cos\omega x)\cdot(\cos\omega x,\sqrt{3}\sin\omega x)$

$=2\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\cos\omega x\sin\omega x$

$=1+\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x=1+2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$.

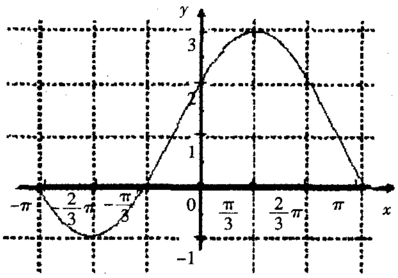
(1) $\because$ 直线$x=\frac{\pi}{3}$为对称轴，$\therefore\sin(\frac{2\omega x}{3}+\frac{\pi}{6})=\pm1$，$\therefore\frac{2\omega x}{3}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in Z)$，$\therefore\omega=\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}$. $\because 0<\omega<1$，$\therefore-\frac{1}{3}<k<\frac{1}{3}$，$\therefore k=0$，$\therefore\omega=\frac{1}{2}$.

(2) $f(x)=1+2\sin(x+\frac{\pi}{6})$

$x+\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7}{6}\pi$
x	$-\pi$	$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\pi$	π
y	0	-1	1	3	1	0

函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$的图像如下图所示.

点评： 三角函数图像的"五点法"法作图，在书本中例题、习题中都有出现，并且三角函数问题一个突出特点是图像的利用率相当高，因此，在此设计试题很有可能.



预测3、结合基本公式，考查三角变换技巧

三角变换的技巧很多，"凑角法"是其典型代表.它在利用和、差角公式求三角函数值时的作用是非凡的.不夸张地说：只要是有难度、有灵活性的和、差角公式的应用题，几乎都要用到这一特殊技巧.

样题4. 设$\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$，$\beta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，且$\alpha$，$\beta$满足$5\sqrt{3}\sin\alpha+5\cos\alpha=8$，$\sqrt{2}\sin\beta+\sqrt{6}\cos\beta=2$，

(1) 求$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})$的值；

(2) 求$\cos(\alpha+\beta)$的值.

解析： (1)$\because 5\sqrt{3}\sin\alpha+5\cos\alpha=8$，$\therefore\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{4}{5}$.

$\because\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$，$\therefore\alpha+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\therefore\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{5}$.

(2)又$\because\sqrt{2}\sin\beta+\sqrt{6}\cos\beta=2$，$\therefore\sin(\beta+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\beta\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\therefore\beta+\frac{\pi}{3}\in(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$，$\therefore\cos(\beta+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\sin[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)]=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{6})+(\beta+\frac{\pi}{3})]$

$=\sin[(\alpha+\frac{\pi}{6})+(\beta+\frac{\pi}{3})]=\sin(\alpha+\frac{\pi}{6})\cos(\beta+\frac{\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})\sin(\beta+\frac{\pi}{3})$

$=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

点评： 三角三角，当中的"角"最为重要，变角

度是首先要考虑的问题.将复杂的角化为简单的角；结合条件与结论，对角度进行合理的拼凑也是必要的.值得提出的是："凑角法"是一类典型方法，它很"霸道"，该用此法而不用此法者，会受到严惩，它让你苦不堪言，不信吗？你试试，看看上题的第二问对$\cos(\alpha+\beta)$直接展开，再求出α,β的正、余弦代入，也许你就知道了.

预测4、结合平面向量，考查三角运算及性质

向量与三角结合十分密切，纵观2010年各省市命题.以向量为载体考查三角运算及三角变换的试题比比皆是，当然，其中涉及向量运算的往往都比较基础，重心落在三角上.

样题5. 已知向量$\vec{a}=(\sin x,\frac{3}{2})$，$\vec{b}=(\cos x,-1)$.

(1) 当$\vec{a}/\!/\vec{b}$时，求$2\cos^2x-\sin2x$的值；

(2) 求$f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$在$[-\frac{\pi}{2},0]$上的值域.

解析：(1)$\because\vec{a}/\!/\vec{b}$，$\therefore\frac{3}{2}\cos x+\sin x=0$，$\therefore\tan x=-\frac{3}{2}$.

$2\cos^2x-\sin2x=\frac{2\cos^2x-2\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x}=\frac{2-2\tan x}{1+\tan^2x}=\frac{20}{13}$.

(2) $\because\vec{a}+\vec{b}=(\sin x+\cos x,\frac{1}{2})$，

$f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$.

$\because-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant0$，$\therefore-\frac{3\pi}{4}\leqslant2x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore-1\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{4})\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\therefore-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$，$\therefore$函数$f(x)$的值域为$[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}]$.

点评：本题是建立在向量的基础上产生的三角问题.其中向量运算难度不大，但至关重要，向量的运算结果是三角运算的起点，因此对向量运算准确性的要求较高.

预测5、结合解三角形，考查与三角形有关的三角运算

三角形本身就与三角有着千丝万缕的联系，无论是正弦定理还是余弦定理都离不开三角运算，这也注定了三角与三角形要"终身相依"，再看2010年各地试题，围绕三角形设计的三角问题分两类：一类是结合三角变换及三角函数性质进行设计.另一类是应用题，利用正、余弦定理解三角形.

样题6. 在$\triangle ABC$中，已知角A为锐角，且

$$f(A)=\frac{[\cos(\pi-2A)-1]\sin(\pi+\frac{A}{2})\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})}{\sin^2(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2})-\sin^2(\pi-\frac{A}{2})}+\cos^2A$$

(Ⅰ) 求$f(A)$的最大值；

(Ⅱ) 若$A+B=\frac{7\pi}{12}$，$f(A)=1$，$BC=2$，求$\triangle ABC$的三个内角和AC边的长.

解析：(Ⅰ) $f(A)=\frac{(\cos2A+1)\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}+\cos^2A$

$=\frac{2\cos^2A\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos A}+\cos^2A=\frac{1}{2}\sin2A+\cos^2A$

$=\frac{1}{2}(\sin2A+\cos2A+1)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2A+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}$.

$\because$角A为锐角，$\therefore0<A<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{4}<2A+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$.

$\therefore$当$2A+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$时，$f(A)$取值最大值，其最大值为$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

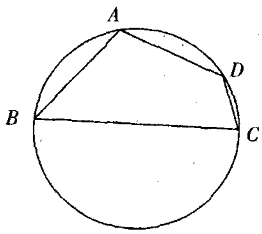
(Ⅱ) 由$f(A)=1$得$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2A+\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}=1$，

$\therefore\sin(2A+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore2A+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$，$A=\frac{\pi}{4}$.

又$\because A+B=\frac{7\pi}{12}$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，$\therefore C=\frac{5\pi}{12}$.

点评：本题将三角变换、三角函数性质及三角形中角的关系及三角形的三角的关系融为一体，从化简三角式入手，难度不大，有新意.

样题7. 广州市某棚户区改造建筑用地平面示意图如图所示.经规划调研确定，棚改规划建筑用地区域近似地为半径是R的圆面.该圆面的内接四边形$ABCD$是原棚户建筑用地，测量可知边界$AB=AD=4$万米，$BC=6$万米，$CD=2$万米.



(1) 请计算原棚户区建筑用地$ABCD$的面积及圆面的半径R的值；

(2) 因地理条件的限制，边界AD、DC不能变

参数方程与普通方程的相互转化策略

■王位高　卢耀才

坐标系与参数方程作为选做题，是各个考生的必争之题，而参数方程与普通方程之间的相互转化在其中扮演着重要角色，利用到转化与化归思想.在研究和解决曲线问题时我们根据具体情况，进行灵活的转化，下面我就和同学们谈谈参数方程与普通方程的相互转化策略.

一、参数方程转化为普通方程的策略

例 1. 已知平面直角坐标系 xOy 的原点与 x 轴正半轴分别与极坐标系的极点和极轴重合，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+a=0$，圆 C 的参数方程为：$\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=-1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），直线 l 与圆 C 有且只有一个交点，那么实数 a 的值是_________.

策略： 先利用 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 把直线 l 的极坐标方程 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+a=0$ 化为直角坐标系方程，利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 把参数方程 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=-1+\sin\theta\end{cases}$ 转化为普通方程，然后再通过几何法判断曲线 C 与直线的位置关系来求实数 a 的值.

解析： 直线 l 的极坐标方程 $\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+a=0$ 化为直角坐标系方程：$x+y+a=0$，圆 C 的参数方程 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=-1+\sin\theta\end{cases}$ 化为普通方程得：$x^2+(y+1)^2=1$，因为圆与直线有且只有一个交点，即是圆与直线相切，由数形结合可知道，圆心到直线的距离等于圆的半径，即 $d=\dfrac{|0-1+a|}{\sqrt{2}}=1$，解得：$a=1-\sqrt{2}$ 或 $1+\sqrt{2}$.

例 2. 曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}(t+\dfrac{1}{t}),\\ y=\dfrac{3}{4}(t-\dfrac{1}{t}),\end{cases}$（$t$ 为参数）的离心率

更，而边界 AB、BC 可以调整，为了提高棚户区改造建筑用地的利用率，请在圆弧 ABC 上设计一点 P；使得棚户区改造的新建筑用地 $APCD$ 的面积最大，并求最大值.

解析：（1）因为四边形 $ABCD$ 内接于圆，

所以 $\angle ABC+\angle ADC=180°$，连接 AC，由余弦定理：

$AC^2=4^2+6^2-2\times4\times6\cos\angle ABC=4^2+2^2-2\times4\times2\cos(180°-\angle ABC)$

所以，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{2}$，$\because\ \angle ABC\in(0,\pi)$，故 $\angle ABC=60°$.

$S_{四边形ABCD}=\dfrac{1}{2}\times4\times6\sin60°+\dfrac{1}{2}\times2\times4\sin120°=8\sqrt{3}$ 万平方米.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理：$AC^2=4^2+6^2-2\times4\times6\cos60°\Rightarrow AC=2\sqrt{7}$.

由正弦定理得 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{4\sqrt{21}}{3}\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$ 万米.

（2）$\because\ S_{四边形APCD}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle APC}$，又 $S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AD\cdot CD\sin120°=2\sqrt{3}$.

设 $AP=x$，$CP=y$，则 $S_{\triangle APC}=\dfrac{1}{2}xy\cdot\sin60°=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy$.

又由余弦定理 $AC^2=x^2+y^2-2xy\cos60°=x^2+y^2-xy=28$，

$\therefore\ x^2+y^2-xy\geqslant2xy-xy=xy\Rightarrow xy\leqslant28$，当且仅当 $x=y$ 时取等号.

$\therefore\ S_{四边形APCD}=2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy\leqslant2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times28=9\sqrt{3}$，

$\therefore$ 最大面积为 $9\sqrt{3}$ 万平方米.

点评： 此题难度中档偏上，它既有三角运算，正、余弦定理的应用，又有基本不等式的应用.若设计此类题，应该安排在解答题的第二题出现.

高考，就是高考.高考命题人，都不是凡人.我们的预测是不是很准呢？看看他们是否走凡人路线.当然，万变不离其宗，即便不准，也不可能超出上述内容而另起“炉灶”.就让我们拭目以待吧！

（作者单位：中山一中）

责任编校　徐国坚