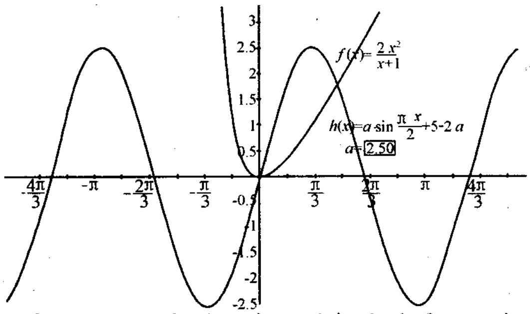


点评 以上各种变式题的解决均是从函数的最值、值域或利用函数图象的角度解决考虑的.事实上,说到底仍是从两个集合关系的角度分析问题,当我们的学生能够从集合的观点看待有关任意性、存在性的问题时,他们能"宏观上站得高,微观上看得深",相信他们不再困惑迷茫.

参考文献

[1]曲一线. 5年高考3年模拟[M]. 北京:首都师范大学出版社,2010.

谈图表型应用问题的求解

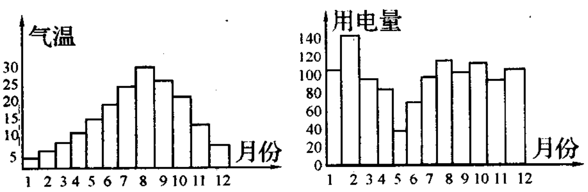
广东中山一中高中部 528403 许少华

图表型应用题是近年高考中经常出现的一类新型试题,由于此类题的各种信息都体现在表中或图形中,通过对表中或图中信息的合理分析、准确应用方能产生结论,而这些信息又往往隐藏在一些杂乱的"信息堆"中,要求考生能"吸取精华",因而有一定的难度,本文例说此类问题的求解方法,希望对考生的复习能有所帮助.

1 抓图象 逐个排查

针对图象信息设计选项,有正确的也有错误的,要你从中选择正确的选项,此类题较简单,求解时重在抓图象逐个排查.

例1 一般地,家庭用电量(千瓦时)与气温(0℃)有一定的关系,下面左、右两图分别表示一年12个月的气温及某家庭在这12个月的用电量,根据这些信息,以下关于家庭用电量与气温间关系叙述中,正确的是( )



A. 气温最高时,用电量最多;

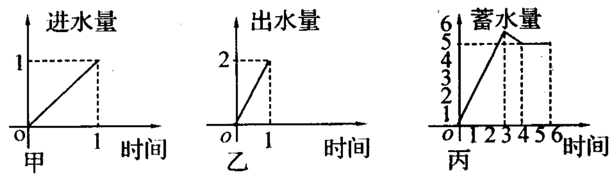
B. 气温最低时,用电量最少;

C. 当气温大于某一值时,用电量随气温增高而增加;

D. 当气温小于某一值时,用电量随气温降低而增加;

解析 经比较可发现二月份气温并非最高,但用电量却较大;一月份气温最低,而用电量却不是最小;由此可以排除A、B;再考查五、六、七、八月份的气温逐步升高,而用电量也逐步升高;即知正确答案为C.

例2 一水池有2个进水口,1个出水口,进出水速度如图甲、乙所示. 某天0点到6点,该水池的蓄水量如图丙所示.(至少打开一个水口)



给出以下3个论断:

①0点到3点只进水不出水;②3点到4点不进水只出水;③4点到6点不进水不出水. 则一定能确定正确的论断是

A. ① B. ①② C. ①③ D. ①②③

解析 从图象可知,0点到3点只进水不出水;3点到4点开一个进水与一个出水;4点到6点两个进水一个出水;比较上述说法可知答案为A.

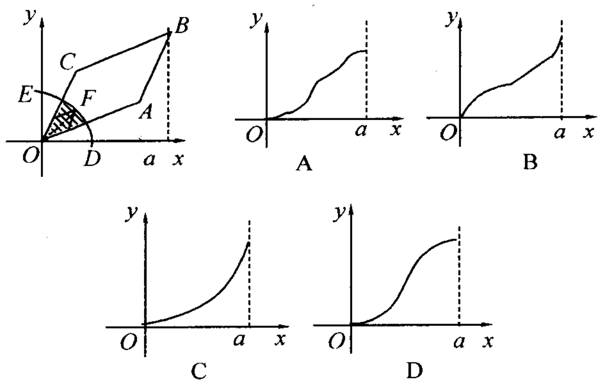
2 抓表述 深入分析

题目中给出一个问题,根据这个问题产生几个图形,要求从中选出最适合题意的图形,此类题,求解的关键要将题目的内容与图形紧密结合起来,抓表述深入分析.

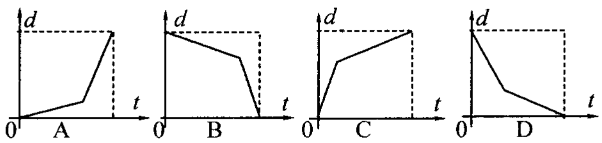
例3 如下图,圆弧型声波DFE从坐标原点O向外传播. 若D是DFE弧与x轴的交点,设$OD=x(0\leqslant x\leqslant a)$,圆弧型声波$DFE$在传播过程中扫过

平行四边形 $OABC$ 的面积为 y(图中阴影部分)，则函数 $y=f(x)$ 的图象大致是(　　).

解析　注意到 y 与 x 的关系存在三个转折点，即当"声波 DFE" 过点 C；当"声波 DFE" 过点 A；当"声波 DFE" 过点 B；观察四个选项即得答案.



例 4　某同学从家到学校，为了不迟到，先是跑，跑累了再走余下的路程，设这位同学在途中花的时间为 t，离学校的路程为 d，下列四个图形中，能反映该同学行程的是(　　)

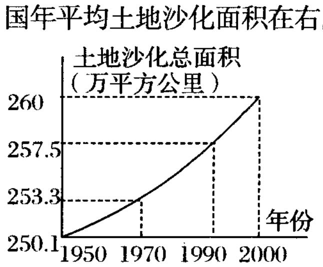


解析　由于 d 表示离学校的路程，因此，"从家到学校" d 的值在慢慢地接近于零，由此，排除 A、C；再看"先是跑，跑累了再走余下的路程"，说明"离学校的路程"先是快速变小，尔后，再慢慢地接近于零；于是，选 D.

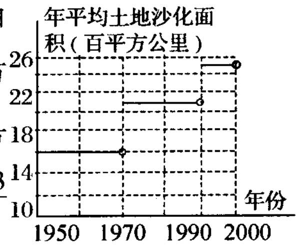
3　抓关系　促成运算

所有的量及关系完全通过图形体现，包括有用的与无用的；对图形中各量及各种关系的分析与筛选是正确求解的关键.

例 5　据报道，我国目前已成为世界上受沙漠化危害最严重的国家之一，下左图表示我国土地沙化总面积在上个世纪五六十年代、七八十年代、九十年代的变化情况，由左图的相关信息，可将上述有关年代中我国年平均土地沙化面积在右图中图示为:______

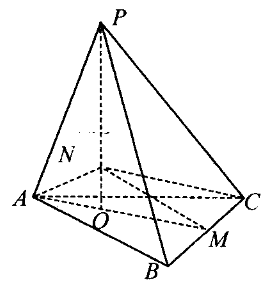


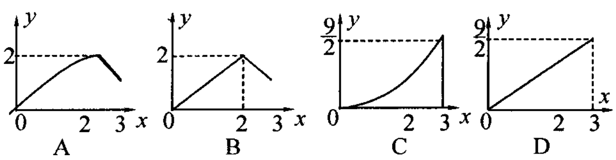
解　析　由 $\frac{253.3-250.1}{20}=0.16$(万平方公里) $=16$(百平方公里)，由 $\frac{257.5-253.3}{20}=0.21$(万平方公里) $=21$(百平方公里)，又由 $\frac{260-257.5}{10}=0.25$(万平方公里) $=25$(百平方公里)



因此，图象如上图所示.

例 6　如图，三棱锥 $P-ABC$ 的高 $PO=8$，$AC=BC=3$，$\angle ACB=30°$，M、N 分别在 BC 和 PO 上，且 $CM=x$，$PN=2x$，则下面四个图象中大致描绘了三棱锥 $N-AMC$ 的体积 V 与 x 的变化关系($x\in(0,3]$)的是(　　)





解析　$V_{N-AMC}=\frac{1}{3}S_{\triangle AMC}\cdot NO=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot MC\cdot AC\sin 30°\cdot(8-2x)=\frac{1}{8}\cdot 2x(8-2x)\leqslant\frac{1}{8}\left[\frac{2x+(8-2x)}{2}\right]^2=\frac{1}{8}\cdot 16=2$

当且仅当 $2x=8-2x$，即 $x=2\in(0,3]$ 时等号取得. 故选 A.

点评　在知识的交汇处设计命题，是最近高考的热点. 这是一道以立几为背景考查函数、不等式知识的选择题. 难度不大，但涉及到棱锥体积公式，极值定理求最值等基本知识与方法，同时考查了对图形语言(函数图象)的阅读理解能力.

4　抓重点　以纲带目

"新题不难，难题不怪"这是高考命题原则. "多考怎么想，少考怎么算"，是近几年高考命题改革的方向之一. 实际问题的一大特点是：信息量大、文字叙述较长，有时还会出现很多数据，面对这些信息要善于找主要矛盾、抓重点，以纲带目.

例 7　某市用水收费的方法是：水费 $=$ 基本费

+超额费+损耗费.若每月用水量不超过最高限量 am^3 时,只付基本费8元和每户每月的定额损耗 c 元;若用水量超过 am^3 时,除了付同上的基本费和损耗费外,超过部分每 m^3 付 b 元的超额费,已知每户每月的定额损耗不超过5元.

该市一家庭今年第一季度的用水量和支付的费用如下表所示,根据上表中的数据求 a、b、c 的值.

月份	用水量(立方米)	水费(元)
1	9	9
2	15	19
3	22	33

解析 设用水量为 $x\mathrm{m}^3$,支付费用为 y 元,则 $y=\begin{cases}8+c(0\leqslant x\leqslant a)\\8+b(x-a)+c(x>a)\end{cases}$,由于 $0<c\leqslant 5$ 得 $8<8+c\leqslant 13$,因此,第二、三两月的用水量超过最高限量,由 $\begin{cases}8+b(15-a)+c=19\\8+b(22-a)+c=33\end{cases}$ 得:$b=2$ 且 $2a=c+19$,再分析限量 a,若 $a<9$,由 $8+2(9-a)+c=9$ 得 $2a=c+17$ 与 $2a=c+19$ 矛盾;因此 $a\geqslant 9$,此时,由 $8+c=9$ 得 $c=1$,所以 $a=10$,故 $a=10$,$b=2$,$c=1$.

点评 *本题通过认真分析题意,抓住"超过与不超过最高限量的付费方式不同"这一重点,会想到用分段函数来表示用水量与费用之间的函数关系.这是一个"伟大"的发现,有了这个发现,求解才可以顺利进行.*

例8 某跳水运动员进行10m跳台跳水训练时,身体(看成一点)在空中的运动路线如下左图所示的一条曲线(图中标出的数据为已知条件),在跳某个规定动作时,正常情况下,该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$ m,入水处距池边的距离为4m,同时,运动员在距水面高度为5m以前,必须完成规定的翻腾动作,并调整好入水姿势,否则,就会出现失误.

问:当该运动员调整好入水姿势时,与池边的距离恰为 $3\frac{3}{5}$m,他此次跳水会出现失误吗?

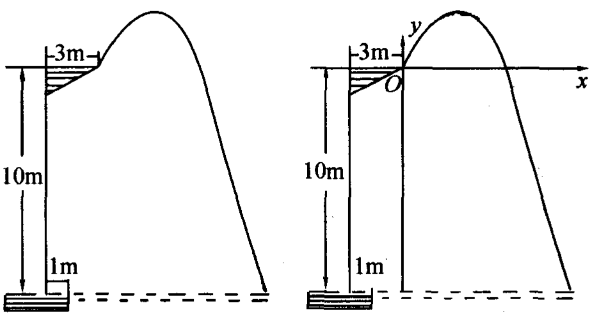
解析 建立如下右图所示的直角坐标系,根据题意设函数解析式为 $y=ax^2+bx+c$,最高点的纵坐标为 $\frac{2}{3}$,且经过点 $(2,-10)$ 及原点,因此,得

$$\begin{cases}c=0\\\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{2}{3}\\4a+2b+c=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{25}{6}\\b=\dfrac{10}{3}\\c=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\b=-2\\c=0\end{cases}.$$

由于抛物线在 y 轴的右侧,因而 $-\frac{b}{2a}>0$,即 a,b 的符号相反故抛物线的方程为 $y=-\frac{25}{6}x^2+\frac{10}{3}x$,当该运动员调整好入水姿势时,与池边的距离恰为 $3\frac{3}{5}$ m,此时,$x=3\frac{3}{5}-2=\frac{8}{5}$,

由 $y=(-\frac{25}{6})\times\frac{8}{5}+\frac{10}{3}\times\frac{8}{5}=-\frac{16}{3}$

此时,运动员离水面的距离为 $10-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}<5$,故此次跳水会出现失误.



点评 *建立直角坐标系,将二次函数的关系式求出来是本题求解的重点,抓住它,问题就可以迎刃而解.*

5 抓特征 诱发联想

特征是题目的"个性",是"此类题"区别于"彼类题"的标志.抓住特征,诱发联想,可以达到求解的目的.

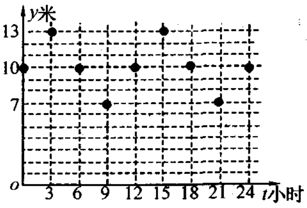
例9 某港口的水深 y(米)是时间 t($0\leqslant t\leqslant 24$,单位:小时)的函数,下面是每天时间与水深关系表:

t(小时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y米	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

(1)选一个函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系.

(2) 若船底离海底的距离不少于 4.5 米时是安全的,如果某船的吃水深度(船底与水面的距离)为 7 米,那么该船在一天中那几段时间可以安全地进出该港?

解析 这是一道应用性问题,可用的条件隐藏在数据中;抓住数据特征,仔细观察所给数据,可以看出水深具有周期性.



根据表中的数据作出图象(即散点图),如右图,由图象可联想用函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + h$ 来刻划水深与时间之间的对应关系.

(1) 设函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + h$ 从图中数据可得出 $A = 3, h = 10, T = 12, \varphi = 0$;由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 12$,得 $\omega = \frac{\pi}{6}$.

故函数式为 $y = 3\sin\frac{\pi x}{6} + 10$.

(2) 由于某船的吃水深度为 7 米,又船底离海底的距离不少于 4.5 米时是安全的;因此,该船在一天中安全进出该港的水深 y 不小于 11.5 米,由 $3\sin\frac{\pi x}{6} + 10 \geqslant 11.5 \Rightarrow \sin\frac{\pi x}{6} \geqslant \frac{1}{2} \Rightarrow 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{5\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$.

由于 $0 \leqslant x \leqslant 24$,得 $1 \leqslant x \leqslant 5$ 或 $13 \leqslant x \leqslant 17$.

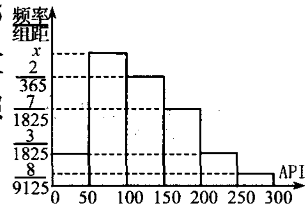
故某船一天中在 1 点到 5 点及 13 点到 17 点两个时间段中都可以安全地进出该港.

点评 实际应用问题往往比较复杂,抓住特点,诱发联想,并结合相关函数是顺利解答的关键.本题抓住了呈周期变化的特征,借助三角函数顺利完成求解.

例 10 根据空气质量指数 API(为整数)的不同,可将空气质量分级如下表:

API	0 ~ 50	51 ~ 100	101 ~ 150	151 ~ 200	201 ~ 250	251 ~ 300	> 300
级别	Ⅰ	Ⅱ	$Ⅲ_1$	$Ⅲ_2$	$Ⅳ_1$	$Ⅳ_2$	Ⅴ
状况	优	良	轻微污染	轻度污染	中度污染	中度重污染	重度污染

对某城市一年(365 天)的空气质量进行监测,获得的 API 数据按照区间 [0,50],(50,100],(100,150],(150,200],(200,250],(250,300] 进行分组,得到频率分布直方图如下图



(1) 求直方图中 x 的值;

(2) 计算一年中空气质量分别为良和轻微污染的天数;

(3) 求该城市某一周至少有 2 天的空气质量为良或轻微污染的概率.

(结果用分数表示. 已知 $5^7 = 78125, 2^7 = 128$, $\frac{3}{1825} + \frac{2}{365} + \frac{7}{1825} + \frac{3}{1825} + \frac{8}{9125} = \frac{123}{9125}$, $365 = 73 \times 5$).

解析 (1) 由图可知, $50x = 1 - (\frac{3}{1825} + \frac{2}{365} + \frac{7}{1825} + \frac{3}{1825} + \frac{8}{9125}) \times 50 = 1 - \frac{123}{9125} \times 50$,解得 $x = \frac{119}{18250}$;

(2) $365 \times (\frac{119}{18250} \times 50 + \frac{2}{365} \times 50) = 219$;

(3) 该城市一年中每天空气质量为良或轻微污染的概率为 $\frac{119}{18250} \times 50 + \frac{2}{365} \times 50 = \frac{219}{365} = \frac{3}{5}$,则空气质量不为良且不为轻微污染的概率 $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$,一周至少有两天空气质量为良或轻微污染的概率 $1 - C_7^7(\frac{2}{5})^7(\frac{3}{5})^0 - C_7^6(\frac{2}{5})^6(\frac{3}{5})^1 = \frac{76653}{78125}$.

点评 本题的特征有二,其一是表中的 API 数据区间与对应的污染状况,抓住它,可将污染状况与直方图对应起来. 其二是提示中给出的一串数据,抓住它,可以联想到频率之和为"1"的应用. 显然,有了这两点,结论也就不远了.

图表型应用题,是近年出现的新型应用问题. 对这类题的求解方法探究,本文只是抛砖引玉,望同行不吝赐教.