从一道试题的求解看一类通项公式的求法

■许少华

数列的通项公式是数列的基本公式之一，它可以准确地揭示数列的所有项，也可以代表数列的任意一项进行运算与推理.几乎所有数列问题都与通项公式有关，特别是数列综合题，是否可解？几乎取决于能否准确的认识通项.因此，关注它也是必须的.下面我们通过一道模拟试题的求解，看看一类通项公式的求解.

例题：数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，且$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$，试问：$m$为何值时，总存在正整数$n$使$a_{n+1}<m$成立？

分析：本题很明显，从$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$中求出通项公式是求解本题的重点.如何求呢？转化是关键.下面先求通项公式

解析一：由$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}$得：$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{a_n+3}{4(a_n+1)}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2(a_n+1)}$.

因此$\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2(a_{n-1}+1)}$，那么$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{a_{n-1}+1})$,

$\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{a_1+1}+(\dfrac{1}{a_2+1}-\dfrac{1}{a_1+1})+\cdots+(\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{a_n+1})=\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{(\dfrac{1}{a_2+1}-\dfrac{1}{a_1+1})(1-\dfrac{1}{2^n})}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2^n})$

$\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

点评：将递推公式进行变形至理想结果，建立在该式的基础上“向下”再写一个.然后，两式相减，促成一新的数列产生，利用新数列的特点、再结合一个恒等式产生结论这是我们常用的方法之一.

类题1：数列$\{a_n\}$满足$a_1=4018$，且$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n+1}$，试求最大的正整数$m$，使$m\leqslant a_{2010}$成立.

解析二：由$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}\Rightarrow a_{n+1}+1=\dfrac{4(a_n+1)}{a_n+3}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{(a_n+1)+2}{4(a_n+1)}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2(a_n+1)}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{2})$.

显然，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{2}\right\}$是以$\dfrac{1}{a_1+1}-\dfrac{1}{2}$为首项，以$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列.

于是$\dfrac{1}{a_{n+1}+1}-\dfrac{1}{2}=(\dfrac{1}{a_1+1}-\dfrac{1}{2})\cdot\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n+1}}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

点评：将递推公式进行变形产生一个新的等比数列，结合等比数列的通项公式产生结论.这也是我们求通项公式的常技巧之一.

类题2：设$b_1=\dfrac{2}{3}$且$b_{n+1}=\dfrac{2}{b_n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$，记$a_n=\dfrac{b_n-1}{b_n+2}$，求a_n.

解析三：由$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}\Rightarrow a_{n+1}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{a_n+3}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{(a_n-1)+4}{2(a_n-1)}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{2}{a_n-1}+\dfrac{1}{2}$，令$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}+\dfrac{1}{2}$，那么$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$.

于是，$b_{n+1}=b_1\cdot(\dfrac{b_2}{b_1})\cdot(\dfrac{b_3}{b_2})\cdot\cdots\cdot(\dfrac{b_{n+1}}{b_n})=(\dfrac{1}{a_1-1}+\dfrac{1}{2})\cdot2^n=-2^{n-1}$，即$\dfrac{1}{a_{n+1}-1}+\dfrac{1}{2}=-2^{n-1}$，从而$a_{n+1}=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

点评：本解法将递推公式变形，产生“$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=2$”后构造“等比”恒等式，利用这一恒等比产生结论.其实，这一恒等式有着非常广泛的应用，它不仅仅可以处理相等的情况，不等时也同样可以处理.请看：

类题3：设数列$\{a_n\}$满足$a_1\geqslant3$，且$a_{n+1}\geqslant2a_n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$，证明：对所有的$n\geqslant1$，有$\dfrac{1}{1+a_1}+\dfrac{1}{1+a_2}+\cdots\dfrac{1}{1+a_n}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

解析四：由$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}\Rightarrow a_{n+1}+1=\dfrac{4(a_n+1)}{a_n+1}$……①

又$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+1}{a_n+3}\Rightarrow a_{n+1}-1=\dfrac{2(a_n-1)}{a_n+3}$……………②

①式除以②式得：$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=2\cdot(\dfrac{a_n+1}{a_n-1})$.

由$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-1}=\dfrac{a_1+1}{a_1-1}\cdot2^n=-2^{n+1}\Rightarrow a_{n+1}=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

点评：本解法中的“①式除以②式”是关键性的一步，也许很多同学会问及这两式如何产生？其实，

真正值得关注的“+1”与“−1”的出现.这种方法叫“特征根法”，我们可以将将 $a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}$ 中的 a_{n+1} 与 a_n 都换成 x，得方程 $x=\frac{3x+1}{x+3}\Rightarrow x=1$ 或 $x=-1$，此时便有 $a_{n+1}-1$ 与 $a_{n+1}+1$ 的诞生了，方程 $x=\frac{3x+1}{x+3}$ 叫 $a_{n+1}=\frac{3a_n+1}{a_n+3}$ 的特征方程，利用特征方程是发现递推数列求解思路的重要方法之一，请再看：

类题 4：设 $\alpha>2$ 给定数列 $\{a_n\}$，其中 $x_1=\alpha$，$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$，求证：若 $\alpha<3$，那么 $x_n\leqslant 2+\frac{1}{2^{n-1}}$.

类题 5：已知 $x_1>0$，$x_1\neq 1$ 且 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$，试证：数列 $\{x_n\}$ 或者对任意自然数 n 满足 $x_{n+1}<x_n$ 或对任意自然数 n 满足 $x_{n+1}>x_n$.

下面完成本题的剩余问题的求解

由 $a_{n+1}<m\Rightarrow\frac{2^n-1}{2^n+1}<m\Rightarrow 2^n(1-m)<1+m$ ……… (*)

(1) 当 $1-m>0$ 即 $m<1$ 时，$2^n<\frac{1+m}{1-m}$.

①若 $\frac{1+m}{1-m}\leqslant 2$，得：$m\leqslant\frac{1}{3}$ 时，n 的值不存在；

②若 $\frac{1+m}{1-m}>2$，得：$m>\frac{1}{3}$ 时，n 的值必存在，至少 n 可以是 1.

(2) 当 $1-m=0$ 即 $m=1$ 时，$1+m=2$ 此时不等式 (*) 恒成立，即 n 可取任意正整数.

(3) 当 $1-m<0$ 即 $m>1$ 时，不等式 (*) 恒成立，即 n 可取任意正整数.

综上，当 $m>\frac{1}{3}$ 时，总存在正整数 n 使 $a_{n+1}<m$ 成立.

通过上述一例通项的求法，可以看出：求数列的通项公式不是孤立的，它将数列的基础知识、基本方法以及涉及的基本技能恰到好处地融为一体，因此，有关通项公式的求解与应用是各级各类考试经常考查的重要技能之一，要想在考试中能够顺利地拿数列分，通项公式的求法你非掌握不可.

类题演练答案：

类题 1：由 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{a_n^2}{a_n+1}-a_n=\frac{1}{a_n+1}-1<0$，因此，$a_{2010}=a_1+(a_2-a_1)+\cdots+(a_{2010}-a_{2009})=a_1-2009+(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{2009}+1})>a_1-2009=2009$ 且 $a_{n+1}<a_n$.

若 $\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\cdots+\frac{1}{a_{2009}+1}<\frac{2009}{a_{2009}+1}<\frac{2010}{a_{2010}+1}<\frac{2010}{2009+1}=1$.

显然，$2009<a_{2010}<2010$，

取 $m=2009$，则 m 是满足 $m\leqslant a_{2010}$ 的最大正整数.

类题 2：由 $b_{n+1}=\frac{2}{b_n+1}\Rightarrow\frac{b_{n+1}-1}{b_{n+1}+2}=\frac{\frac{2}{b_n+1}-1}{\frac{2}{b_n+1}+2}=(-\frac{1}{2})\cdot\frac{b_n-1}{b_n+2}$.

显然，数列 $\left\{\frac{b_n-1}{b_n+2}\right\}$ 是以 $\frac{b_1-1}{b_1+2}$ 为首项，以 $-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

于是 $\frac{b_n-1}{b_n+2}=\frac{b_1-1}{b_1+2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$.

$\because b_1=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=\frac{b_n-1}{b_n+2}=\frac{b_1-1}{b_1+2}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}=\cdot(-\frac{1}{2})^{n+1}$.

类题 3：由 $a_{n+1}>2a_n+1$，得 $\frac{1+a_n}{1+a_{n+1}}\leqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore\frac{1}{1+a_n}=\frac{1}{1+a_1}\cdot(\frac{1+a_1}{1+a_2})\cdot(\frac{1+a_2}{1+a_3})\cdot\cdots\cdot(\frac{1+a_{n-1}}{1+a_n})\leqslant\frac{1}{1+a_1}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$. 又由于 $a_1\geqslant 3$，因而 $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{1+a_1}[1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}]=\frac{2}{1+a_1}\leqslant\frac{1}{2}$.

类题 4：由 $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2(x_n-1)},\\ x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_{n+1}-2}{x_{n+1}}=(\frac{x_n-2}{x_n})^2\Rightarrow\frac{x_n-2}{x_n}=(\frac{\alpha-2}{\alpha})^{2^{n-1}}\Rightarrow x_n=2+\frac{2}{(\frac{\alpha-2}{\alpha})^{2^{n-1}}-1}$.

$\because\alpha>2\Rightarrow\frac{\alpha}{\alpha-2}>1\Rightarrow(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}}>1$.

由 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 得 $(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}}=(1+\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}}\geqslant 1+(\frac{\alpha}{\alpha-2})\cdot 2^{n-1}\geqslant 1+2^n\Rightarrow x_n=2+\frac{2}{(\frac{\alpha}{\alpha-2})^{2^{n-1}}-1}\leqslant 2+\frac{1}{2^{n-1}}$.

类题 5：由 $x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}+1=\frac{(x_n+1)^3}{3x_n^2+1},\\ x_{n+1}-1=\frac{(x_n-1)^2}{3x_n^2+1}\end{cases}\Rightarrow\frac{x_{n+1}+1}{x_{n+1}-1}=(\frac{x_n+1}{x_n-1})^3\Rightarrow\frac{x_n+1}{x_n-1}=(\frac{x_1+1}{x_1-1})^{3^{n-1}}\Rightarrow x_n=\frac{(x_1+1)^{3^{n-1}}+(x_1-1)^{3^{n-1}}}{(x_1+1)^{3^{n-1}}-(x_1-1)^{3^{n-1}}}$.

显然，若 $x_1>1$ 时，$x_n>1$；若 $0<x_1<1$ 时，$0<x_n<1$.

由 $x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n=\frac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}$，

故当 $x_1>1$ 时，$x_{n+1}<x_n$；当 $0<x_1<1$ 时，$x_{n+1}>x_n$.

责任编校　徐国坚