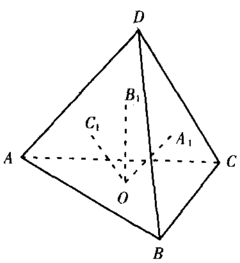
谈类比在解题中的应用

■中山市第一中学 许少华

类比，是由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征.类比，可以通过特殊推知特殊.借助类比，可以推测未知，可以发现结论，可以探索和提供解决问题的思路和方法.本文谈谈谈类比在解题中的应用，希望能对提高同学们的解题能力有所帮助.

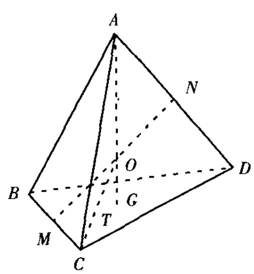
一、退一步，寻找类比起点

例1 如图，过四面体$V-ABC$的底面上任一点O分别作$OA_1 /\!/ VA$，$OB_1 /\!/ VB$，$OC_1 /\!/ VC$，A_1，B_1，C_1分别是所作直线与侧面交点. 求证：$\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}$为定值.

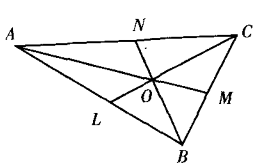


分析 退一步考虑平面上的类似命题："过$\triangle ABC$（底）边AB上任一点O分别作$OA_1 /\!/ AC$，$OB_1 /\!/ BC$，分别交BC，AC于A_1，B_1，看看$\frac{OA_1}{AC}+\frac{OB_1}{BC}$是否为定值". 这一命题利用相似三角形性质很容易推出其为定值1. 另外，过A、O分别作BC垂线，过B、O分别作AC垂线，则用面积法也不难证明定值为1.于是类比到空间图形，也可用两种方法证明其定值为1.

证明 如图，设平面$OA_1VA \cap BC=M$，平面$OB_1VB \cap AC=N$，平面$OC_1VC \cap AB=L$，则有$\triangle MOA_1 \backsim \triangle MAV$，$\triangle NOB_1 \backsim \triangle NBV$，$\triangle LOC_1 \backsim \triangle LCV$，得$\frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}=\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}$.



在底面$\triangle ABC$中，由于AM、BN、CL交于一点O，用面积法易证得：



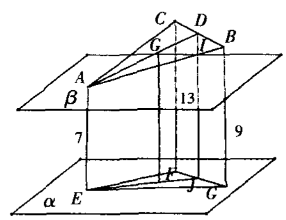
$$\frac{OM}{AM}+\frac{ON}{BN}+\frac{OL}{CL}=1,$$

$$\therefore \frac{OA_1}{VA}+\frac{OB_1}{VB}+\frac{OC_1}{VC}=1.$$

点评 运用类比推理的方法，可以帮助我们发现问题，探索规律，不少定理、公式就是运用这种方法提出，再经过严格的证明得到的.

二、换角度，调整类比空间

例2 平面α外的有一个三角形，三个顶点A、B、C到平面α的距离分别是7、9、13，则这个三角形的重心到平面α的距离为________



分析与解 设三角形为$\triangle ABC$，如果这个三角形的三个顶点在平面α的同侧，如图过点A作平面$\beta /\!/ \alpha$，则β，α之间的距离为7，B到β的距离为9−7=2，C到β的距离为13−7=6，利用梯形中位线易求得BC中点D到β的距离为$\frac{6+2}{2}=4$，而重心G在AD上，且$\frac{AG}{AD}=\frac{2}{3}$，重心$G$到$\beta$的距离为$d'=4\times\frac{2}{3}$，故重心$G$到$\alpha$的距离为$d=4\times\frac{2}{3}+7=\frac{29}{3}$. 其实，这三点未必在平面$\alpha$的同侧，哪些点在另一侧呢？要分类讨论且各类还要画图，是不是很麻烦呢？

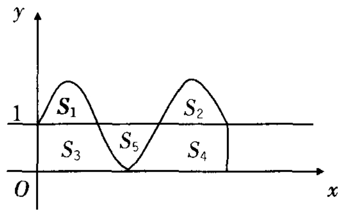
类比，我们换个角度，想一想地理中的"海拔高度"这一概念，如果山峰海拔4235m记为+4235m，海峡的海拔高度235m记为−235m. 我们若以平面α为参照平面，因为A、B、C三点在平面α同侧，则A、B、C三点的"海拔高度"分别为7，9，13，记为+7，+9，+13，我们以此为"坐标"来表示A、B、C三点与平面α的相对位置关系，而三角形的重心坐标为三坐标的算术平均值，故重心G到平面α的距离为$d=\frac{7+9+13}{3}=\frac{29}{3}$，那么，另外的可能情况为$d_1=\frac{7+9-13}{3}=1$，$d_2=\frac{7-9+13}{3}=\frac{11}{3}$，$d_1=\frac{-7+9+13}{3}=5$. 这样我们就很轻

松的产生了所有情形的结论.

三、抓定量，看准类比实质

例3 函数$y=f(x)$的图像与直线$x=a,x=b$及x轴围成图形的面积成为函数$f(x)$在$[a,b]$上的面积，已知函数$y=\sin nx$在$[0,\frac{\pi}{n}]$的面积为$\frac{2}{n}(n\in N^*)$，则①函数$y=\sin 3x$在$[0,\frac{2\pi}{3}]$上的面积为________.②函数$y=\sin(3x-\pi)+1$在$[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$上的面积为________.

解析 (1) 令$n=3$，则$y=\sin 3x$在$[0,\frac{\pi}{3}]$上的面积为$\frac{2}{3}$，又∵$y=\sin 3x$在$[0,\frac{\pi}{3}]$和$[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$上的面积相等，所以函数$y=\sin 3x$在$[0,\frac{\pi}{3}]$上的面积为$\frac{4}{3}$.



(2) 由$y=\sin(3x-\pi)+1$，设$\varphi=3x-\pi$，

∴ $y=\sin 3\varphi+1$，又 ∵ $x\in[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$，

∴ $3\varphi\in[0,3\pi]$，∴ $\varphi\in[0,\pi]$，由(1)得：$y=\sin 3\varphi$在$[0,\frac{\pi}{3}]$上的面积是$\frac{2}{3}$，

∴ $y=\sin 3\varphi+1$在 $[0,\pi]$ 上的面积为$S_1+S_2+S_3+S_4=2\times\frac{2}{3}+2S_3$.

∵ $S_3+S_4=1\times(\pi-0)-S_5=\pi-\frac{2}{3}$，

∴函数$y=\sin(3x-\pi)+1$在$[\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}]$上的面积为$\pi-\frac{2}{3}$.

点评 本题的第一问很简单，只需代入一下就可以了.第二问的求解抓住$y=\sin 3x$在 $[0,\frac{\pi}{3}]$上的面积为$\frac{2}{3}$这个不变量，对$y=\sin(3x-\pi)+1$从图形上进行类比，再进行分析、转化即可产生结论.其中，抓不变量是促成类比顺利进行的关键.

四、想性质，促成类比发生

例4 我们知道：圆的任意一弦（非直径）的中点和圆心连线与该弦垂直（即：斜率均存在时，斜率之积为-1），那么，若椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$的一弦（不过原点）中点与原点连线及弦所在直线的斜率均存在，你能得到什么结论？请予以证明.对于双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$呢？也存在类似结论吗？

解析 假若弦的斜率与弦的中点和圆心连线的斜率都存在，由于两线垂直，我们知道斜率之积为-1.对于方程$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，若$a=b$，则方程即为圆的方程，由此可以猜测两斜率之积为$-\frac{b^2}{a^2}$或$-\frac{a^2}{b^2}$.

事实上，设弦AB的两端点的坐标分别为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，中点为P，则

$$\begin{cases}b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2\end{cases}\Rightarrow b^2(x_2^2-x_1^2)+a^2(y_2^2-y_1^2)=0\Rightarrow\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow k_{AB}\cdot k_{OP}=-\frac{b^2}{a^2}$$，即两斜率之积为$-\frac{b^2}{a^2}$.

类似地，设双曲线的弦为AB，弦中点为P，可得$k_{AB}\cdot k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}$.

点评 本题首先产生结论，然后再证明，显然方便了很多，如何产生结论呢？要会进行类比，通过想到圆的性质，促成类比发生

五、看特征，究出类比母体

例5 若函数$f(x)$满足：当$xy\neq0$时，$f(xy)=f(x)+f(y)$且$f(x)$不恒为零，当$x>1$时，$f(x)=0$.

(1) 求证：函数$f(x)$为偶函数.

(2) 求使$f(x)+f(2-\frac{3}{x})<0$成立的x的范围.

(3) 若$U_n=\frac{n}{f(2^{-n})+2^n}(n\in N^*)$，求数列$\{U_n\}$的前项$n$和$S_n$.

分析 由$f(xy)=f(x)+f(y)$让我们想到了对数函数$f(x)=\log_a x$，类比对数函数，我们可以想到$f(1)=0$，若$x>1$时，$f(x)>0$则$a>0$，此时函数递增.同样也应该存在着“$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$”及“$f(a^n)=f(a)$”.

解析 (1)令$x=y=1$，得$f(1)=0$，又$f(1)=f[(-1)\times(-1)]=2f(-1)=0$，得$f(-1)=0$，再令 $y=-1$，得$f(-x)=f(x)+f(-1)$，即$f(-x)=f(x)$，故$f(x)$为偶函数.

(2) 由条件得$f(x)+f(2-\frac{3}{x})<0$，可转化为$f[x(2-\frac{3}{x})]<f(1)$，即$f(|2x-3|)<f(1)$.

由$f(x)=f(x^2\cdot\frac{1}{x})=f(x^2)+f(\frac{1}{x})=2f(x)+f(\frac{1}{x})$，得$f(\frac{1}{x})=-f(x)$，那么$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$，于是设$0<x_1<x_2$，则$\frac{x_2}{x_1}>1$，得$f(\frac{x_2}{x_1})>0$，即$f(x_2)-f(x_1)>0$也就是$f(x_2)>f(x_1)$，∴$f(x)$在（0，+∞）上为增函数，

$\therefore\begin{cases}|2x-3|<1,\\2x-3\neq 0,\end{cases}$ 得$1<x<\frac{3}{2}$或$\frac{3}{2}<x<2$为所求的范围.

(3) 类比对数函数的性质，易得$f(a^n)=nf(a)$，那么$f(2^{-n})=f[(\frac{1}{2})^n]=nf(\frac{1}{2})$.

由$f(1)=0$，得$f(2\times\frac{1}{2})=2f(\frac{1}{2})=0\Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$，

从而$U_n=\frac{n}{f(2^{-n})+2^n}=\frac{n}{2^n}$.

于是$S_n=U_1+U_2+\cdots+U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$……①

那么$2S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$……………………②

由②减①，得$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$，

故数列$\{U_n\}$的前n项和S_n为$2-\frac{n+2}{2^n}$.

点评 本题通过看特征“$f(xy)=f(x)+f(y)$”，发现了本题的类比母体“对数函数$f(x)=\log_a^x$”，类比对数函数，发现了很多相关结论，从而打开了解题思路.

六、重方法，扩大类比战果

一个优秀的数学方法决不是解一个题，而是解一类题.由于这些题可能会分布在不同的章节之中，因此，就要求我们要善于知识迁移，善于将这一优秀的方法类比到不同内容的问题之中.类比二次函数最值的求法，我们可以轻松求解下列问题：

例6 求解下列各题，并比较各题的解法有什么区别

(1) 求函数$y=x^2+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$的最小值.

(2) 若$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 9$时，求$y=\log_3(3x)\cdot\log_3\frac{x}{27}$的最大及最小值.

(3) 若关于x的方程$\cos^2x+4\sin x+c=0$ $[0,\pi]$在内有解，求c的范围.

(4) 求$y=(\sin x+1)(\cos x+1)$的最大及最小值.

(5) 求$x+\sqrt{3-x}$的范围.

(6) 若方程$9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$有实数解，求实数$a$的取值范围.

(7) 若α，β是实系数二次方程$x^2-2mx+m+2=0$的两实根，求$\alpha^2+\beta^2$最值.

(8) 实数a在什么范围内取值时？曲线c_1:$\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$与曲线c_2:$y^2=\frac{1}{2}x$有公共点.

(9) 由椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b>0)$的顶点$B(0,-b)$引一条弦BP，求BP的最大长度.

解析 (1)$y=(x-\frac{1}{x})^2+2(x-\frac{1}{x})+2=[(x-\frac{1}{x})+1]^2+1\geqslant 1$.

(2)由$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 9\Rightarrow -1\leqslant\log_3x\leqslant 2$,而$y=\log_3(3x)\cdot\log_3\frac{x}{27}$$=(1+\log_3x)(\log_3x-3)=(\log_3x-1)^2-4\Rightarrow -4\leqslant y\leqslant 0$.

(3)当$x\in[0,\pi]$时，$0\leqslant\sin x\leqslant 1$，由$c=\sin^2x-4\sin x-1=(\sin x-2)^2-5$，得：$-4\leqslant c\leqslant 4$.

(4) $y=(\sin x+1)(\cos x+1)=(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x+1=\frac{1}{2}[(\sin x+\cos x)+1]^2-1$，由$-\sqrt{2}\leqslant\sin x+\cos x\leqslant\sqrt{2}$，得：$-1\leqslant y\leqslant\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

(5) 设$t=\sqrt{2-x}$，则$x=3-t^2(t\geqslant 0)$，由$x+\sqrt{3-x}=3-t^2+t=-(t-\frac{1}{2})^2+\frac{13}{4}$.

那么$x+\sqrt{3-x}$的范围为:$[\frac{13}{4},+\infty)$.

(6)由$a=9^{-|x-2|}+4\cdot 3^{-|x-2|}=-(3^{-|x-2|}-2)^2+4$,又由$0<3^{-|x-2|}\leqslant 1\Rightarrow 0<a\leqslant 3$.

(7)由$\triangle=(-2m)^2-4(m+2)\geqslant 0\Rightarrow m\leqslant -1$或$m\geqslant 2$.

由于$\begin{cases}\alpha+\beta=2m,\\\alpha\beta=m+2\end{cases}\Rightarrow\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4m^2-2(m+2)$$=4m^2-2m-4$,当$m=-1$时,$\alpha^2+\beta^2$的最小值为2.

(8) 由$\frac{(x-a)^2}{2}+y^2=1$知可设$\begin{cases}x=a+\sqrt{2}\cos\alpha,\\y=\sin\alpha,\end{cases}$则$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(a+\sqrt{2}\cos\alpha)\Rightarrow a=-2\cos^2\alpha-\sqrt{2}\cos\alpha+2=-2(\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{4})^2+\frac{9}{4}$.由于$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$，得$-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\frac{9}{4}$.

(9) 设点P的坐标为(x,y)，由$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，得：$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2(-b\leqslant y\leqslant b)$，

所以$|BP|=\sqrt{x^2+(y+b)^2}=\frac{1}{b}\sqrt{(b^2-a^2)y^2+2b^3y+b^2(a^2+b^2)}$，

(i)当$2b^2\leqslant a^2$时,$y=-\frac{b^3}{b^2-a^2}$,得$|BP|_{min}=\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{(a^2+b^2)}$；

(ii) 当$2b>a$时，$y=b$，得$|BP|_{min}=2b$.

点评 上述各题不管是以什么形式出现，最终都是二次函数问题.如果我们对二次函数的性质与最值问题，真正达到熟练掌握的程度，再将方法稍作类比即可完成这些问题的求解.

类比，是重要的推理方法之一，更是重要的思维方法之一.愿这种特殊的思维方法早日在你的“思维农场”中生根、发芽.

责任编校 徐国坚