谈归纳推理在解题中的应用

■中山市第一中学　许少华

归纳推理是由某些事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理.归纳推理在具体实施过程中，关键是找到“部分对象具有的特征”，再将这一特征应用到“该类事物”中去.归纳推理有过无数次的辉煌，产生过一个又一个的伟大发现.它是数学的重要方法之一，下面谈一谈这一重要方法在中学数学中的应用.

一、数据分组，变隐为显

面对“一大堆”的数据，欲从数据中发现问题、发现规律，往往要对数据进行处理，分组是重要方法之一.通过数据分组，使隐藏在数据“深处”的规律显现出来.

例 1 设有数列 $1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\cdots$

①问 10 是该数列的第几项到第几项?

②求第 100 项;

③求前 100 项的和.

解析 将已知数列进行分组，第一组一个“1”；第二组两个“2”；第三组三个“3”；第四组四个“4” …如此下去.

①易知“10”皆出现在第十组，由于前九组中共有：$1+2+\cdots+9=45$ 项，因此 10 在该数列中从第 46 项到第 55 项.

②由 $1+2+\cdots+n<100$，即 $\frac{n(n+1)}{2}<100$ 成立的最大自然数为 13，又 $1+2+\cdots+13=\frac{13(13+1)}{2}=91$，因此第 100 项为 14.

③由②知该数列前 100 项的和为：$S_{100}=1\times1+2\times2+\cdots+13\times13+9\times14=945$.

点评 本题建立在已知数列的基础上，归纳出所求结论.其方法可能较多，对数据分组也许是其中较为理想的方法.它通过合理的分组，使规律由“隐”变“显”，抓住规律、再利用规律使结论快速产生.

二、寻找“邻居”，快速反应

有些问题的构成规律很清楚，但要利用这个规律解题却存在一定的困难.此时，我们可以通过对相邻两项所满足的关系进行分析、转化.利用“分析与转化”的“成果”进行处理，也许问题的求解一下子变得轻松、自然.

例 2 观察下表中的数字排列规律：

1	……第 1 行
2　2	……第 2 行
3　4　3	……第 3 行
4　7　7　4	……第 4 行
5　11　14　11　5	……第 5 行
6　16　25　25　16　6	……第 6 行
… …	

请问：第 10 行的第 2 个数是________；第 n 行

$(n\geqslant 2)$ 第 2 个数是________.

解析 注意这个数表构成的规律，第一行是一个"1"，第二行是两个"2"，第三行的第一个数是"3"，其它数按照杨辉三角的构成规律，于是，

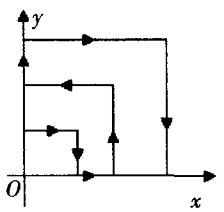
设第 $n-1$ 行的第二个数为 a_{n-1}，第 n 行的第二个数为 a_n，则 $a_n=a_{n-1}+n-1$，即 $a_n-a_{n-1}=n-1$，由于 $a_3=4$，又 $a_n=a_3+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=4+3+4+\cdots+(n-1)=4+\frac{3+(n-1)}{2}\times(n-3)=\frac{n^2-n+2}{2}$，于是第 10 行的第 2 个数是 $a_{10}=\frac{10^2-10+2}{2}=46$.

点评 本题建立在归纳推理的基础上进行分析、求解，产生"第 10 行的第 2 个数是多少"肯定没有问题，再产生"第 n 行($n\geqslant 2$)的第 2 个数是多少"则有困难.通过寻找"邻居"，借助数列知识，促成快速反应，使问题获解，它告诉我们归纳推理不是孤立的.

三、步步深入，层层显现

推理的进行往往是一步步深入的，面对层次分明的问题，要一步步前进、一层层深入，使问题深处的规律漫漫地显现出来，然后借助规律产生结论.

例 3 如图：一个粒子在第一象限运动，在第一秒内它从原点运动到（0，1），然后它接着按图示在 x 轴、y 轴的平行方向向右、向上来回运动，且每秒移动一个单位长度，求 2006 秒时，这个粒子所处的位置.



解析 第一层有$(0,1),(1,1),(1,0)$三个整点（除原点），共用了 3 秒；第二层有五个整点 $(2,0)$，$(2,1),(2,2),(1,2),(0,2)$，共用 5 秒；第三层有七个整点 $(0,3),(1,3),(2,3),(3,3),(3,2),(3,1),(3,0)$，共用 7 秒，…，第 n 层共有 $2n+1$ 个整点，共用 $2n+1$ 秒.假设第 2006 秒时粒子运动在第 $n+1$ 层，那么前 n 层共用秒数为 $\frac{[3+(2n+1)]n}{2}<2006$，由此得最大 $n=43$，且当 $n=43$ 时，$\frac{[3+(2n+1)]n}{2}=1935$，于是，第 2006 秒时，粒子在第 44 层，且在第 71 个出现，根据规律我们知道第 44 层将从点 $(44,0)$开始，那么$(44,0),(44,1),\cdots,(44,43),(44,44),(43,44),(42,44),(41,44),\cdots,(18,44)$，共 71 个.因此，第 2006 秒时，这个粒子所处的位置为 $(18,44)$.

点评 本题通过认识第一层、第二层、第三层，想象出第 n 层.使规律一下子变得清晰可见，再抓住各层的构成规律产生结论，无论是思维还是推理都恰到好处，没有丝毫"浪费".

四、抓住起点，合理展示

"起点"，指的是初始状态，如数列的前几项、动点运动的前几秒、几何图形的最基本的几种情形等，通过对"起点"的分析、探究，揭示其规律的本质特征，从而使问题获解.

例 4 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，对一切 $n\in \mathbf{N}^*$，点$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$都在函数$f(x)=x+\frac{a_n}{2x}$的图像上.

（Ⅰ）求 a_1,a_2,a_3 的值，猜想 a_n 的表达式，并证明其正确性；

（Ⅱ）将数列$\{a_n\}$依次按 1 项、2 项、3 项、4 项循环地分为 $(a_1),(a_2,a_3),(a_4,a_5,a_6),(a_7,a_8,a_9,a_{10})$；$(a_{11}),(a_{12},a_{13}),(a_{14},a_{15},a_{16}),(a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})$；$(a_{21})$，…，分别计算各个括号内各数之和，设由这些和按原来括号的前后顺序构成的数列为 $\{b_n\}$，求 b_5+b_{100} 的值.

解析 （Ⅰ）因为点$\left(n,\frac{S_n}{n}\right)$在函数$f(x)=x+\frac{a_n}{2x}$的图像上，

故 $\frac{S_n}{n}=n+\frac{a_n}{2n}$，所以 $S_n=n^2+\frac{1}{2}a_n$.令 $n=1$，得 $a_1=1+\frac{1}{2}a_1$，所以 $a_1=2$；

令 $n=2$，得 $a_1+a_2=4+\frac{1}{2}a_2$，所以 $a_2=4$；令 $n=3$，得 $a_1+a_2+a_3=9+\frac{1}{2}a_3$，所以 $a_3=6$.由此猜想：$a_n=2n$.

用数学归纳法证明如下：

① 当 $n=1$ 时，通过上面的求解可知猜想成立.

② 假设 $n=k$ $(k\geqslant 1)$时猜想成立，即 $a_k=2k$ 成立，则当 $n=k+1$ 时，注意到 $S_n=n^2+\frac{1}{2}a_n(n\in \mathbf{N}^*)$，从而 $S_{k+1}=(k+1)^2+\frac{1}{2}a_{k+1}$，$S_k=k^2+\frac{1}{2}a_k$.两式相减，得 $a_{k+1}=2k+1+\frac{1}{2}a_{k+1}-\frac{1}{2}a_k$，即 $a_{k+1}=4k+2-a_k$，由归纳假设得 $a_k=2k$，故 $a_{k+1}=4k+2-a_k=4k+2-2k=2(k+1)$.这说明当 $n=k+1$ 时，猜想也成立.

由①②知，对一切 $n\in \mathbf{N}^*$，$a_n=2n$ 成立.

（Ⅱ）因为 $a_n=2n(n\in \mathbf{N}^*)$，所以数列$\{a_n\}$依次按 1 项、2 项、3 项、4 项循环地分为 $(2),(4,6),(8,10,12),(14,16,18,20)$；$(22),(24,26),(28,30,32),(34,36,38,40)$；$(42)$，….每一次循环记为一组.由于每一个循环含有 4 个括号，故 b_{100} 是第 25 组中第 4 个括号内各数之和.由分组规律知，由各组第 4 个括号中所有第 1 个数组

成的数列是等差数列，且公差为20. 同理，由各组第4个括号中所有第2个数、所有第3个数、所有第4个数分别组成的数列也都是等差数列，且公差均为20. 故各组第4个括号中各数之和构成等差数列，且公差为80. 注意到第一组中第4个括号内各数之和是68，所以 $b_{100}=68+24\times80=1988$.又 $b_5=22$，所以 $b_5+b_{100}=2010$.

点评 本题无论是第一问还是第二问，规律的展现都是从“第一”“第二”到“第三”开始的.建立在前几个的基础上，发现规律、提出猜想，进一步验证或证明结论.这是处理很多数学问题常用模式之一，我们必须加以重视.

五、引入记号，妙揭规律

我们解题时常用换元法，那么“引入记号”其实是换元思想的延伸，也是特殊的换元法之一.由于有些看似规律性很强的数学问题，真正利用其显现的规律进行解题时，会发现操作性不强，甚至不可能操作下去.这时，我们可以引入记号，通过转换问题的形式，也许另外的规律被巧妙地揭示出来，难解的问题一下子被征服了.

例5 (I) 设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t|0\le s<t$，且$s,t\in Z\}$中所有的数从小到大排列成的数列，即 $a_1=3$，$a_2=5$，$a_3=6$，$a_4=9$，$a_5=10$，$a_6=12$，…

将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

3

5　6

9　10　12

___　___　___　___

___　___　___　___　___

(i) 写出这个三角数表的第四行、第五行；

(ii) 求 a_{100}；

(II) 设$\{b_n\}$是集合 $\{2^r+2^s+2^t|0\le r<s<t$，且$r,s,t\in Z\}$，中所有的数从小到大排成的数列.已知 $b_k=1160$，求 k 的值.

解析 (I) 用记号(s,t)表示s,t的取值，那么数列 $\{a_n\}$中的项对应的(s,t)也构成一个三角表

(0, 1)

(0, 2)　(1, 2)

(0, 3)　(1, 3)　(2, 3)

有没有发现规律呢？第一行右边的数是“1”；第二行右边的数是“2”；第三行右边的数是“3”；于是……第四行右边的数便是“4”，第五行右边的数自然就是“5”了.而左边的那个数总是从“0”开始逐个递增.因此，

(i) 第四行的数是：$2^0+2^4=15$；$2^1+2^4=18$；$2^2+2^4=20$；$2^3+2^4=24$；第五行的数是：$2^0+2^5=33$；$2^1+2^5=34$；$2^2+2^5=38$；$2^3+2^5=40$；$2^4+2^5=48$.

(ii) 由 $1+2+\cdots+13=\dfrac{13(13+1)}{2}=91$，知 a_{100} 在第十四行中的第9个数，于是 $a_{100}=2^8+2^{14}=16640$.

(II) 对于附加题我们也引入记号(r,s,t)分别表示r,s,t的取值，对数列$\{b_n\}$中项对应的r,s,t进行分组，

第一组：(0,1,2)

第二组：(0,1,3),(0,2,3)
　　(1,2,3)

第三组：(0,1,4),(0,2,4),(0,3,4)
　　(1,2,4),(1,3,4)
　　(2,3,4)

第四组：(0,1,5),(0,2,5),(0,3,5),(0,4,5)
　　(1,2,5),(1,3,5),(0,4,5)
　　(2,3,5),(2,4,5)
　　(3,4,5)

………………如此下去

看到规律了吗？(1)(r,s,t)位于$t-1$组、第s列中的第$r+1$个位置；(2) 前一组对应的数都小于后一组对应的数；同组中前一列对应的数都小于后一列对应的数；同列中前面的数小于后面的数.

由于 $b_k=1160=2^3+2^7+2^{10}$ 对应(3,7,10)，即第9组、第7列中第4个数，因此由 $[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+8)]+(1+2+\cdots+6)+4=145$，

故 $b_k=1160$ 时，$k=145$.

点评 本题从已知的“三角形数表”可以看出，其构成的规律性较强，但写下去，直到产生 a_{100} 是根本不可能的，利用这些规律推出 a_{100} 呢？也不现实.怎么办？引入记号，通过这种方式进行引入，新有规律产生了，且极易利用与操作.于是结论很快也就顺其自然地产生了.结合此题，可以看出合理引入记号的威力.

归纳推理是重要的推理之一，也是处理问题的重要方法之一.面对一个数学问题如何应用归纳推理？没有固定的模式（当然，也不是所有的数学问题都可以用归纳推理来解决），要视具体问题的构成与规律，只有我们悉心探究、深人思考，也许才会用得恰到好处.

责任编校　徐国坚