谈谈用构造法解题

■中山市第一中学　许少华

构造法是建立在创造性思维的基础上，依据问题的特点展开多角度、多层次、全方位的联想，并适时、大胆、合理、科学地进行创造，从而使问题巧妙获解的一种方法.由于构造法的这个特点，致使由构造法产生的解题方法往往比较独特，常给人一种赏心悦目的感觉.请看：

例1 已知曲线 $C_n: x^2-2nx+y^2=0(n=1,2,\cdots)$ 从点 $P(-1,0)$ 向曲线 C_n 引斜率为 $k_n(k_n>0)$ 的切线 l_n，切点为 $P_n(x_n,y_n)$.(1)求数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的通项公式；(2)证明：$x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}<\sqrt{2}\sin\frac{x_n}{y_n}$.

分析 本题是2009年广东高考数学试题的最后一题，在本题中我们仅看其中一部分问题的求解，即 $x_1\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$ 的证明，由第一问容易得到 $x_n=\frac{n}{n+1}$，从而 $\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.于是，欲证上述不等式实际上就是证明"$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$".

证明 设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$，$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$，

由于 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$，…，$\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$，因此 $A<B$，$\therefore A^2<AB=(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n})(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1})=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，

故 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$，即 $x_1\cdot x_3\cdot\cdots\cdot x_{2n-1}<\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}$.

点评 这个解法的一个突出特点是：思维量大，运算量小.当建立在"$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$"的基础上，成功构造出"$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$"之后，求解变得异常轻松.类似本题构造的问题还有一些，下面列举几例，以飨读者.

例2 求证：$(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$.

证明 设 $A=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$，$B=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}$，$C=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}$.

由于 $\frac{2}{1}>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$，$\frac{5}{4}>\frac{6}{5}>\frac{7}{6}$，…，$\frac{3n-1}{3n-2}>\frac{3n}{3n-1}>\frac{3n+1}{3n}$，

因此，$A^3>ABC=(\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2})(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})(\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n})=3n+1$.

于是 $A>\sqrt[3]{3n+1}$，故原不等式成立.

点评 观察"$A=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$"可以发现相邻两分数之间都可以插入两个分数，插入分数后分子构成了连续的自然数，分母也是连续的自然数，乘积时，正好可以约分.也许这就是构造两式的思维起点.本题的求解与高考题的求解非常相似，如果说有区别的话，就是多构造了一个式子，其余完全相同.

例3 若 α,β,γ 为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，求证 $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}\geqslant\frac{3}{2}$.

证明 设 $A=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma}$，$B=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma}$，$C=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}$，结合已知，得 $B+C=3$，$A+B=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}\geqslant3$.同理得 $A+C\geqslant3$.

那么 $2A+(B+C)\geqslant6\Rightarrow A\geqslant\frac{3}{2}$，故原不等式成立.

点评 本题又是构造了 A、B、C，如何寻找三者之间的关系的呢？利用同角三角函数之间的基本关系发现了"$B+C=3$"，三元均值不等式发现了"$A+B\geqslant3$""$A+C\geqslant3$"，将三者结合，结论很快就可以产生了.

例 4 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，试证：$\dfrac{y^2-x^2}{z+x}+\dfrac{z^2-y^2}{x+y}+\dfrac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant 0$.

证明 设 $A=\dfrac{y^2-x^2}{z+x}+\dfrac{z^2-y^2}{x+y}+\dfrac{x^2-z^2}{y+z}$，$B=\dfrac{z^2-y^2}{z+x}+\dfrac{x^2-z^2}{x+y}+\dfrac{y^2-x^2}{y+z}$，则 $A+B=0$.

而 $A-B=(\dfrac{y^2-x^2}{z+x}-\dfrac{y^2-x^2}{y+z})+(\dfrac{z^2-y^2}{x+y}-\dfrac{z^2-y^2}{z+x})+(\dfrac{x^2-z^2}{y+z}-\dfrac{x^2-z^2}{x+y})=\dfrac{(y+x)(y-x)^2}{(z+x)(y+z)}+\dfrac{(z+y)(z-y)^2}{(x+y)(z+x)}+\dfrac{(x+z)(x-z)^2}{(y+z)(x+y)}\geqslant 0$.

$\therefore A\geqslant 0$，故原不等式成立.

点评 本题的求解仅构造了 A、B，结合条件发现了"$A+B=0$"且"$A-B\geqslant 0$"，两者结合，结论就产生了.

例 5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相等的正整数，求证：$a_1+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{3^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

证明 设 $A=a_1+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{3^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n^2}$，$B=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$，则 $A+B=(a_1+\dfrac{1}{a_1})+(\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{1}{a_2})+\cdots+(\dfrac{a_n}{n^2}+\dfrac{1}{a_n})\geqslant 2(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})$.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相等的正整数，$\therefore B\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.因此 $A\geqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，故原不等式成立.

点评 本题又构造了 A、B，再结合条件发现了"$A+B\geqslant 2(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})$"，同时又产生了"$B\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}$"，进一步产生结论.

例 6 设 a,b,c 为正实数，且 $abc=1$，求证：$\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

证明 设 $A=\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{1}{c^3(a+b)}$，$B=\dfrac{a(b+c)}{4}+\dfrac{b(c+a)}{4}+\dfrac{c(a+b)}{4}$，则 $A+B=\left[\dfrac{1}{a^3(b+c)}+\dfrac{a(b+c)}{4}\right]+\left[\dfrac{1}{b^3(c+a)}+\dfrac{b(c+a)}{4}\right]+\left[\dfrac{1}{c^3(a+b)}+\dfrac{c(a+b)}{4}\right]\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

又因为 $abc=1$，$\therefore B=\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})+\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a})+\dfrac{1}{4}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$.

因此，$A\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-B=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})\geqslant\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}=\dfrac{3}{2}$，故原不等式成立.

点评 本题结合均值不等式发现"$A+B\geqslant\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$"很关键，有了这一步结论便顺利产生.

例 7 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}\geqslant\dfrac{a+b+c}{2}$.

证明 设 $s=a+b+c$，$A=\dfrac{a^2}{s-a}+\dfrac{b^2}{s-b}+\dfrac{c^2}{s-c}$，$B=\dfrac{s^2}{s-a}+\dfrac{s^2}{s-b}+\dfrac{s^2}{s-c}$，则 $B-A=4s$. 由于 $\dfrac{s^2}{s-a}+\dfrac{a^2}{s-a}=\dfrac{\frac{8}{9}s^2+\frac{1}{9}s^2+a^2}{s-a}\geqslant\dfrac{\frac{8}{9}s^2+\frac{2}{3}sa}{s-a}=\dfrac{14}{9}\cdot\dfrac{s^2}{s-a}-\dfrac{2}{3}s$，$\therefore B+A\geqslant\dfrac{14}{9}B-2s\Rightarrow\dfrac{5}{9}B-A\leqslant 2s$，得 $\dfrac{5}{9}(4s+A)-A\leqslant 2s\Rightarrow A\geqslant\dfrac{s}{2}$，故原不等式成立.

点评 在本题的求解中，我们发现了"$B-A=4s$"且"$\dfrac{5}{9}B-A\leqslant 2s$"，两者结合产生"$A\geqslant\dfrac{s}{2}$"，也就是要证明的结论.

例 8 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}^+$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求证：$\dfrac{x_1^2}{1-x_1}+\dfrac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\dfrac{1}{n-1}$.

证明 设 $A=\dfrac{x_1^2}{1-x_1}+\dfrac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\dfrac{x_n^2}{1-x_n}$，$B=\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{1}{1-x_2}+\cdots+\dfrac{1}{1-x_n}$，则 $B-A=n+1$.

由于 $\dfrac{1}{1-x_1}+\dfrac{x_1^2}{1-x_1}=\dfrac{\frac{n^2-1}{n^2}+(\frac{1}{n^2}+x_1^2)}{1-x_1}\geqslant\dfrac{\frac{n^2-1}{n^2}+\frac{2x_1}{n}}{1-x_1}=\dfrac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot\dfrac{1}{1-x_1}-\dfrac{2}{n}$，$\therefore B+A\geqslant\dfrac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot B-2$，得 $(n+1+A)+A\geqslant\dfrac{n^2+2n-1}{n^2}(n+1+A)-2\Rightarrow A\geqslant\dfrac{1}{n+1}$，故原不等式成立.

点评 本题求解中，发现了"$B-A=n+1$"及"$B+A\geqslant\dfrac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot B-2$"再从前一式中求出 B 代入到后一式中去，即可产生结论.

通过上述几例可以看出：构造法是集数学的灵活性与巧妙性于一身的创造性方法；从构思到求解无不散发着浓郁的"数学芬芳".数学高考命题正逐步由基础型、运算型向思维型、能力型转化，"多考怎么想，少考怎么算"已成为中学数学教育界的共识，在此特殊时期，构造法无论是从提高思维能力出发还是从提高高考成绩出发，都是值得我们关注的重要方法.

责任编校　徐国坚