三角创新问题赏析

■中山市第一中学　许少华

“创新是一个民族进步的灵魂，是一个国家兴旺发达的不竭动力.”在这个充满挑战的年代里，创新也是一种机遇，学生迎高考，关注创新试题是应该的也是必须的.君不见年年高考有新题，岁岁选拔有新招.也正是“新题”“新招”才将同学的成绩拉开距离，那么三角中会有什么样的新题呢?请看：

创新点一：入手基础，挖掘概念深层内涵

例1 两个质点M,N在单位圆上，都$A(1,0)$从出发且都按逆时针方向运动，质点M每秒走过α弧度，质点N每秒走过β弧度(其中$0<\alpha<\beta<\pi$)，如果两质点都在第14秒时回到A点，并且在第2秒时均位于第二象限，$\alpha+\beta$的值为__________.

解析 根据题意$14\alpha,14\beta$均为2π的整数倍，故可设$14\alpha=2m\pi,14\beta=2n\pi$(其中$m,n\in \mathbf{Z}$)，从而$\alpha=\frac{m\pi}{7},\beta=\frac{n\pi}{7}$.因为$0<\alpha<\beta<\pi$，得$0<2\alpha<2\beta<2\pi$，又由于两点在第2秒时均位于第二象限，从而$2\alpha,2\beta$均在第二象限，即$\frac{\pi}{2}<2\alpha<2\beta<\pi$，那么$\frac{\pi}{4}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，也就是$\frac{\pi}{4}<\frac{m\pi}{7}<\frac{n\pi}{7}<\frac{\pi}{2}$，得$\frac{7}{4}<m<n<\frac{7}{2}$，于是$m=2,n=3$，故$\alpha=\frac{2\pi}{7},\beta=\frac{3\pi}{7}$，从而$\alpha+\beta=\frac{2\pi}{7}+\frac{3\pi}{7}=\frac{5\pi}{7}$.

点评 本题是基本概念问题，主要考查终边相同角的表示.设计者将这一内容置于两质点的运动之中，求解时，要注意理解“两质点都在第14秒时回到A点”所体现出来的数学内容的实质，透过这一实质完成求解.可以看出，此题对这一概念进行了深层次的挖掘，考查十分到位.

创新点二：水乳胶溶，在向量中寻找落点

例2 已知向量$\overrightarrow{m}=(1,1)$，向量$\overrightarrow{n}$与向量$\overrightarrow{m}$夹角为$\frac{3\pi}{4}$，且$\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}=-1$，若向量$\overrightarrow{n}$与向量$\overrightarrow{q}=(1,0)$的夹角为$\frac{\pi}{2}$，向量$\overrightarrow{p}=(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2})$，其中$A,C$为$\triangle ABC$的内角，且$B=\frac{\pi}{3}$，求$|\overrightarrow{n}+\overrightarrow{p}|$的取值范围.

解析 设$\overrightarrow{n}=(x,y)$，得$x+y=-1$及$x^2+y^2=1$，解得$\overrightarrow{n}=(-1,0)$或$\overrightarrow{n}=(0,-1)$.由向量$\overrightarrow{n}$与向量$\overrightarrow{q}=(1,0)$的夹角为$\frac{\pi}{2}$，知$\overrightarrow{n}=(0,-1)$，由$B=\frac{\pi}{3}$，得$A+C=\frac{2\pi}{3}$，那么$|\overrightarrow{n}+\overrightarrow{p}|^2=|(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2}-1)|^2=\cos^2A+\sin^2C=1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})$.

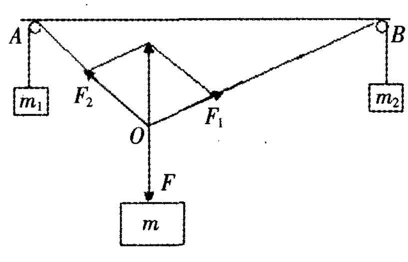
由于$0<A<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，得$\frac{1}{2}\leqslant 1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})<\frac{5}{4}$，故$|\overrightarrow{n}+\overrightarrow{p}|$的取值范围为$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$.

点评 “因为有了运算，向量的力量无限”，这是教材对向量的评价.三角与向量十分亲密，命题人常常将三角问题的“落点”放入向量之中.求解者不仅要有熟练的三角功底，同样要掌握向量的运算技能.本题很特别，三角与向量水乳交融、难解难分.也许都说不清哪个是重点，但从整个求解过程上看，三角还是占了上风.

创新点三：跨科结合，巧用三角物理背景

例3 对于同一高度(足够高)两个定滑轮A、B，用一条足够长的绳子跨过它们，并在两端分别挂有质量为m_1、$m_2(m_1\neq m_2)$的物体，另在两个滑轮中间的一段绳子的O点处悬挂一物体，已知$m_1:m_2=OB:OA$，$\angle AOB=90°$且系统保持平衡(滑轮半径、绳子质量均忽略不计)，则悬挂物体的质量为______.

解析 如图，依题意，我们可以作出受力图，设两绳子OA,OB对物体m的拉力分别为F_1,F_2，物体m方向向下和重力为F由系统平衡条件知：$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$，



设$\angle BAO=\alpha$,则$\angle ABO=90°-\alpha$,根据平行四边形法则,

得$\begin{cases}\vec{F_2}\cos\alpha+\vec{F_1}\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\vec{0},\\ \vec{F_2}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)+\vec{F_1}\sin\alpha+\vec{F}=\vec{0}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m_2\cos\alpha-m_1\sin\alpha=0,\\ m_2\cos\alpha+m_1\sin\alpha=m\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\sin\alpha=\frac{m}{2m_1},\\ \cos\alpha=\frac{m}{2m_2}\end{cases}\Rightarrow 1=(\frac{m}{2m_1})^2+(\frac{m}{2m_2})^2\Rightarrow m=\frac{2m_1m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}$,

即悬挂物体的质量为$\frac{2m_1m_2}{\sqrt{m_1^2+m_2^2}}$.

点评 三角是求解问题的工具,这是人们的共识.这个工具不仅仅体现在数学上,也体现在其它学科之中.跨学科设计综合试题一直倍受高考命题人的关注,挖掘与利用三角的物理背景或以物理为载体设计三角问题具有“新鲜感”.本题结合平衡条件产生三角方程是求解的重点,合理、准确地利用三角方程是本题转折点,稍有疏忽就会出错.

创新点四:星光灿烂,多参数的完美统一

例4 已知x,y是三角形的两边,α,β是同一个三角形的两角,且x,y,α,β之间满足下列关系$\begin{cases}x\sin\alpha+y\cos\beta=0,\\ x\cos\alpha-y\sin\beta=0,\end{cases}$求$\alpha,\beta$的值.

解析 由$\begin{cases}x\sin\alpha=-y\cos\beta,\\ x\cos\alpha=y\sin\beta,\end{cases}$平方相加得$x^2=y^2$,即三角形为等腰三角形.此时条件可转化为$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\beta=0,\\ \cos\alpha-\sin\beta=0,\end{cases}$再平方相加得$\sin(\alpha-\beta)=-1$.

$\because 0<\alpha<\pi,0<\beta<\pi,\therefore\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$,即$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}>\frac{\pi}{2}$,因此$\beta$为顶角,于是$2\alpha+\beta=\pi$,结合$\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}$,得$\alpha=\frac{\pi}{6}$,$\beta=\frac{2\pi}{3}$.

点评 两个方程,四个未知数,虽然是同一个三角形的边与角,但并未指明“角对边”,初看本题很难入手,当认清条件后,可以发现消去参数很重要,有了这一步,使得到了一个并不复杂的三角关系式,从而问题很快迎刃而解.

创新点五:接轨时代,在探索中产生结论

例5 在区间$(0,\frac{\pi}{2})$内是否存在实数对(c,d),使①$\sin(\cos c)=c$;②$\cos(\sin d)=d$;③$c=\sin d$同时成立?若存在,指出实数对(c,d)可能的数量;若不存在,说明理由.

解析 设函数$f(x)=\sin(\cos x)-x$,$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$,

任取$x_1x_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$,且$x_1<x_2$,则$0<\cos x_2<\cos x_1<\frac{\pi}{2}$,那么$\sin(\cos x_2)<\sin(\cos x_1)$,又$x_1<x_2$,从而$\sin(\cos x_1)-x_1>\sin(\cos x_2)-x_2$,即$f(x_1)>f(x_2)$,于是函数$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$单调递减,又$f(0)=\sin 1>0$,$f(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$,故函数$f(x)$在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上与$x$轴有唯一交点,即存在唯一实数$c$使$\sin(\cos c)=c$成立.

同理可得在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上存在唯一实数d,使$\cos(\sin d)=d$成立.

由$\cos(\sin d)=d$,得$\sin[\cos(\sin d)]=\sin d\in(0,\frac{\pi}{2})$,又因为在区间$(0,\frac{\pi}{2})$上存在唯一实数$c$使$\sin(\cos c)=c$成立,于是$c=\sin d$.

点评 存在性问题是近年出现的新型试题,在高考试卷中也时有出现.2008年理科卷第18题(文卷第20题)、2007年理科卷第18题(文卷第19题)都是存在性问题.面对存在性问题,我们可以“假定结论存在”或“既不否定也不肯定”进行推理,当出现矛盾时,结论不存在;否则,结论存在.本题充分利用了三角函数的单调性,紧紧地围绕着单调性促使问题获解.

创新点六:紧跟课标,从研究中获得结果

例6 已知函数$y=f(x)$满足:$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x,(-1\leqslant x<0)\\ f(x-1)+1,(x\geqslant 0)\end{cases}$.

(Ⅰ)分别写出$x\in[0,1)$时,$y=f(x)$的解析式$f_1(x)$和$x\in[1,2)$时,$y=f(x)$的解析式$f_2(x)$;并猜想$x\in[n,n+1)$,$n\geqslant -1,n\in Z$时,$y=f(x)$的解析式$f_{n+1}(x)$(用x和n表示)(不必证明);

(Ⅱ)当$x=n+\frac{1}{2}(n\geqslant -1,n\in Z)$时,$y=f_{n+1}(x)$,$x\in[n,n+1)$,$(n\geqslant -1,n\in Z)$的图像上有点列$A_{n+1}(x,f(x))$和点列$B_{n+1}(n+1,f(n+1))$,线段$A_{n+1}B_{n+2}$与线段$B_{n+1}A_{n+2}$的交点$C_{n+1}$,求点$C_{n+1}$的坐标$(a_{n+1}(x),b_{n+1}(x))$;

(Ⅲ)在前面(Ⅰ)、(Ⅱ)的基础上,请你提出一个关于点列$C_{n+1}(a_{n+1}(x),b_{n+1}(x))$的问题,并进行研究,写下你研究的过程.

解析 (Ⅰ)$x\in[0,1)$时,$x-1\in[-1,0)$,得$f_1(x)=f(x-1)+1=\sin\pi(x-1)+1=1-\sin\pi x$.

当$x\in[1,2)$时,$x-1\in[0,1)$,得$x-2\in[-1,0)$,$f_2(x)=f(x-1)+1=f(x-2)+1+1=\sin\pi(x-2)+2=2+\sin\pi x$.

当 $x\in[n,n+1),n\geqslant -1,n\in Z$时,得 $x-(n+1)\in[-1,0)$,

由 $f_{n+1}(x)=f(x-1)+1=f(x-2)+2=\cdots=n+1+(-1)^{n+1}\sin\pi x$.

猜测:$f_{n+1}(x)=n+1+(-1)^{n+1}\sin\pi x$.

(Ⅱ)当 $x=n+\frac{1}{2}$ 时,$f_{n+1}(n+\frac{1}{2})=n+1+(-1)^{n+1}\sin\pi(n+\frac{1}{2})=n$,得 $A_{n+1}(n+\frac{1}{2},n)$.

又 $f(n+1)=f(0)+n+1=n+2+f(-1)=n+2$,得 $B_{n+1}(n+1,n+2)$,$A_{n+1}(n+\frac{1}{2},n),B_{n+1}(n+1,n+2)$,此时 $k_{A_{n+1}A_{n+2}}=k_{B_{n+1}B_{n+2}}=1$,$k_{A_{n+1}B_{n+1}}=k_{A_{n+2}B_{n+2}}=4$,所以 C_{n+1} 是平行四边 $A_{n+1}A_{n+2}B_{n+2}B_{n+1}$ 对角线的交点,得 $C_{n+1}(n+\frac{5}{4},n+\frac{3}{2})$.

(Ⅲ)本小问具有开放性,可提出的问题较多,如:

1. 在(Ⅱ)的条件下,点 C_{n+1} 与 C_{n+2} 之间具有怎样的数量关系?

答案:$C_{n+1}C_{n+2}=\sqrt{2}$.

2. 在(Ⅱ)的条件下,点 C_{n+1} 与 C_{n+2} 之间具有怎样的位置关系?

答案:C_{n+1} 与 C_{n+2} 在直线 $y=x+\frac{1}{4}$ 上.

点评 本题将三角中的诱导公式与归纳推理联合设计试题,具有一定新颖性与较高的抽象性.第三问又是结论多样化的开放性问题. 可以说与新课标跟得很紧,充分体现新课标精神与新课标理念.只要能克服抽象性,求解难度会有所下降.

创新点七:联系实际,从生活中提炼精华

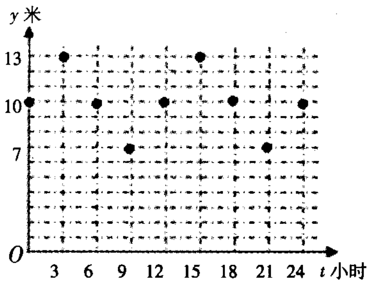
例 7 某港口的水深 y(米)是时间 $t(0\leqslant t\leqslant 24$,单位:小时),的函数,下面是每天时间与水深关系表:

t (小时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y 米	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

(1) 选一个函数来近似描述这个港口的水深与时间的函数关系;

(2) 若船底离海底的距离不少于 4.5 米时是安全的,如果某船的吃水深度(船底与水面的距离)为 7 米,那么该船在一天中那几段时间可以安全的进出该港?

解析 (1) 观察所给数据,可以看出水深具有周期性. 根据表中的数据作出图象(即散点图),如右图,



根据图像可考虑用函数 $y=A\sin(\omega x+\Phi)$来刻划水深与时间之间的对应关系,从图中数据可得出:$A=3,h=10,T=12,\Phi=0$.

由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=12$,得 $\omega=\frac{\pi}{6}$,故函数式为 $y=3\sin\frac{\pi x}{6}+10$.

(2)由于某船的吃水深度为 7 米,又船底离海底的距离不少于 4.5 米时是安全的.因此,该船在一天中安全进出该港的水深 y 不小于 11.5 米,由 $3\sin\frac{\pi x}{6}+10\geqslant 11.5\Rightarrow\sin\frac{\pi x}{6}\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow 2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in Z)$.

由于 $0\leqslant t\leqslant 24$,得 $1\leqslant x\leqslant 5$ 或 $13\leqslant x\leqslant 17$.

故某船一天中在 1 点到 5 点及 13 点到 17 点两个时间段中都可以安全的进出该港.

点评 实际应用问题往往比较复杂,根据特点进行函数拟合而获得具体函数模型,最后利用这个函数模型来解决相应的实际问题是处理实际应用问题的一种常见的方法.由于现实生活中呈周期变化的现象很多,因而,借助三角函数来处理问题的方法必须掌握.

创新点八:牵手导数,共谱难题新篇章

例 8 已知函数 $f(x)=4x^3-3x^2\cos\theta+\frac{1}{32}$,其中 $x\in R,\theta$ 为参数,且 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

(Ⅰ)当 $\cos\theta=0$ 时,判断函数 $f(x)$是否有极值;

(Ⅱ)要使函数 $f(x)$的极小值大于零,求参数 θ 的取值范围;

(Ⅲ)若对(Ⅱ)中所求的取值范围内的任意参数 θ,函数 $f(x)$在区间$(2a-1,a)$内都是增函数,求实数 a 的取值范围.

解析 (I)当 $\cos\theta=0$ 时,$f(x)=4x^3+\frac{1}{32}$,则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是增函数,故无极值.

(II)$f'(x)=12x^2-6x\cos\theta=6x(2x-\cos\theta)$,令 $f'(x)=0$,得 $x_1=0$,$x_2=\frac{\cos\theta}{2}$.由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 及(I),只需考虑 $\cos\theta>0$ 的情况.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{\cos\theta}{2})$	$\frac{\cos\theta}{2}$	$(\frac{\cos\theta}{2},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 x 变化时，$f'(x)$的符号及$f(x)$的变化情况如上表.

因此，函数$f(x)$在 $x=\frac{\cos\theta}{2}$ 处取得极小值$f(\frac{\cos\theta}{2})=-\frac{1}{4}\cos^3\theta+\frac{1}{32}$.

要使$f(\frac{\cos\theta}{2})>0$，必有$-\frac{1}{4}\cos^3\theta+\frac{1}{32}>0$，可得 $0<\cos\theta<\frac{1}{2}$，所以$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$.

(III)由(II)知，函数$f(x)$在区间$(-\infty,0)$与$(\frac{\cos\theta}{2},+\infty)$内都是增函数.

由题设，函数$f(x)$在$(2a-1,a)$内是增函数，则 a 须满足不等式组$\begin{cases}2a-1<a,\\ a\leqslant 0\end{cases}$或$\begin{cases}2a-1<a,\\ 2a-1\geqslant\frac{1}{2}\cos\theta.\end{cases}$由（II），参数$\theta\in(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$时，$0<\cos\theta<\frac{1}{2}$.

要使不等式 $2a-1\geqslant\frac{1}{2}\cos\theta$ 关于参数 θ 恒成立，必有 $2a-1\geqslant\frac{1}{4}$

综上，解得 $a\leqslant 0$ 或 $\frac{5}{8}\leqslant a<1$，所以 a 的取值范围是$(-\infty,0]\cup[\frac{5}{8},1)$

点评 *三角命题常规都是以中档题为主，在试卷中的排列也较为靠前. 它会不会联络其它内容在难度上进行“改革”呢？本题就是典范，它将函数、导数网络其中，以综合题的形式与考生见面，既有难度也颇具新意.*

好了，关于三角的创新试题就谈这么多.我们知道“新”与“旧”是相对的，今天是新题就是明天的旧题.随着教育改革的深入和高考制度的变化，新的试题会不断地涌现，它既代表着试题设计的新潮，又代表着未来的试题设计方向.欲在当今考试制度下获得胜利，钻研创新试题很有必要的.

责任编校　徐国坚

（上接第 63 页）9. 下列有关甲处的说法，正确的有

A. 甲村可能面临的地质灾害是滑坡和火山

B. 在甲村地层中能找到大理石矿床

C. 甲村可能有温泉

D. 甲村的地层中不能找到化石

10. 下列地点中可能依次钻探到石油和承压水的是

A. A 和 B 处　　B. B 和 A 处

C. 甲和 B 处　　D. A 和甲处

11. 我国庐山的地质构造属于图 10 中的

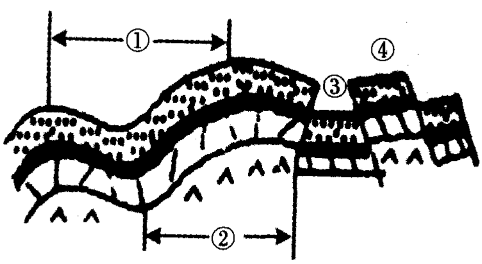


图 10

A. ①　B. ②　C. ③　D. ④

答案点拨

1. C（从题意可以知道，a 图中断崖在山顶，无瀑布；b 图中就是形成瀑布，高度也不过 10 米；c 图中瀑布从 200 米左右高度倾泻而下，与试题符合，d 图中连溪流都没有，所以可排除 ABD）

2. A（d 图中的甲处位于低山丘陵地区的山脊顶端，有断崖存在，坡度极大，而我国南方多雨，因此甲处在多雨季节极易发生滑坡）

3. B（等高线愈密集坡度愈大）

4. C（首先根据纬度计算该地在冬至日正午的太阳高度，其次根据测量处两点相对高度计算出两地的水平距离）

5. A（①河段等高线比②河、③河、④河所在河段密集，落差大，水流速度快，所以水位上涨最快）

6. D（沿 f 和 h，就是沿等高线进行选线，坡度比较平缓，投资比较少，安全，并且经过的居民点多，可以带动沿线经济发展）

7. B（褶皱构造的背斜顶部受到张力，常被侵蚀成谷地，而向斜由于槽部受挤压，物质坚实，不易被侵蚀，反而成为山岭）

8. A（根据第 7 题的解释，可知是由外力和内力共同作用的结果）

9. C（甲处于岩石破碎，易受风化侵蚀作用，可以发育成湖泊，形成泉水）

10. B（因为 B 处属于背斜，有良好的储油构造，A 处是向斜，储藏地下水，可以找到地下水）

11. D（我国庐山属于断块山，相对上升形成地垒，所以选 D）

责任编校　郑蔼娴