基本不等式的八大应用

■中山市第一中学　许少华

不等式充斥着整个数学空间. 随意浏览一下任意一套试卷,用不等号连接的式子总是占据着“上风”,这说明了不等式的应用性与重要性,也说明了不等式是永不衰退的高考热点.面对丰富的不等式内容,哪些知识点的“出镜率”高?又为什么总是它们高?请看:

应用一:最值问题

最值问题是基本不等式的重要应用之一,是不等式应用的核心,也是不等式应用的精华.应用基本不等式求最值时,一定要注意等号会不会成立.有些时候不等式的推导没有问题,但不可能有等号成立的时刻,这时的值是取不到的值,当然,不能作为最值.

例1 设 $x,y\in R^+$,且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,求 $x+y$ 的最小值.

解法一 由 $x+y=(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+y)=(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y})\geqslant 4$,当且仅当 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$,结合 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$,得 $x=2,y=2$ 时,取得最小值4.

解法二 由已知,设 $\frac{1}{x}=\frac{m}{m+n}$,$\frac{1}{y}=\frac{n}{m+n}\Rightarrow x=1+\frac{n}{m}$,$y=1+\frac{m}{n}$,$x+y=(1+\frac{n}{m})+(1+\frac{m}{n})=2+(\frac{n}{m}+\frac{m}{n})\geqslant 4$,当且仅当 $m=n$,即 $x=2,y=2$ 时,取得最小值4.

解法三 由 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\Rightarrow x+y=xy\Rightarrow x+y\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$,由 $x,y\in R^+$,得 $x+y\geqslant 4$,当且仅当 $x=y=2$ 时,取得最小值4.

点评 本题给出了三种方法求解,这三种方法都是基本方法. 涉及的技能是我们必须熟练掌握的基本技能.

例2 已知 $x,y\in(-1,1)$,且 $xy=-\frac{1}{2}$,求 $u=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}$ 的最小值.

解析 由 $u=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-y^2}}=2\sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}-x^2-y^2}}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{\frac{5}{4}-1}}=4$,或由 $u=\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1-y^2}=\frac{2-x^2-y^2}{\frac{5}{4}-x^2-y^2}=1+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-(x^2+y^2)}\geqslant 1+\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}-1}=4$.

点评 本题很精干,基本不等式的应用也很特别,第一种解法,两次使用到它,幸好两次不等式成立的条件相同;第二种解法转化后再用,两解都具有“活”的特点,欣赏价值较高.

应用二:恒成立问题

恒成立问题是不等式的“特产”,它的求解方法常规是最值转化法,求最值的方法往往有两类,一类是利用基本不等式求最值;另一类是函数求最值.

例3 若常数 $k>0$,对于任意非负实数 a,b,都有 $a^2+b^2+kab\geqslant c(a+b)^2$ 恒成立,求最大的常数 c.

解析 (i)当 $k\geqslant 2$ 时,$a^2+b^2+kab\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$,当且仅当 $ab=0$ 时等号成立.

(ii)当 $0<k<2$ 时,$a^2+b^2+kab=(a+b)^2-2(2-k)ab\geqslant(a+b)^2-(2-k)(\frac{a+b}{2})^2=\frac{2+k}{2}(a+b)^2$,当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

由(i)(ii),知 $c=\begin{cases}1, & (k\geqslant 2)\\ \frac{2+k}{4}. & (0<k<2)\end{cases}$

点评 本题中基本不等式的应用较为隐含,且在应用时还必须进行分类讨论.这两点若有一点“上不去”,就出现要么不会做,要么产生错误结论的后果.

例4 若不等式 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 对于一切 $x\in(0,\frac{1}{3}]$ 恒成立,则 a 有(　　)

A. 最大值0　　　B. 最大值-2

C. 最小值$-\frac{10}{3}$　　　D. 最小值-2

解析 由 $x^2+ax+1\geqslant 0$ 及 $x\in(0,\frac{1}{2}]$,得 $a\geqslant-\frac{x^2+1}{x}=-(x+\frac{1}{x})$.由于 $x\in(0,\frac{1}{3}]$ 时,函数是增函数,又当 $x=\frac{1}{3}$ 时,$-(x+\frac{1}{x})=-\frac{10}{3}$,因此 a 最小值为 $-\frac{10}{3}$,选C.

点评 当得到 $a\geqslant-(x+\frac{1}{x})$ 后,也许一下子就看到了希望,借助基本不等式,很快就可以在B或D中找到一个想要的答案,再看一下基本不等式中的等号会不会成立,便大失所望. 这是建立在基本不等式的基础上,常设的陷阱之一,同学们必须清楚.

应用三:范围问题

考查代数式的范围或某一字母的范围是基本不等式的又一考查方式.在这种考查中,要么基本不等式应用很灵活,要么基本不等式应用很隐蔽. 不论是哪一种,设计出来的试题难度都不一般.

例5 当 $0<x<a$ 时,不等式 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\geqslant 2$ 恒成立,求实数 a 的范围.

解析 由 $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$,于是 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(a-x)^2}\geqslant\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x})^2$.又 $\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{a-x})^2\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x(a-x)}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{(\frac{x+a-x}{2})^2}=\frac{8}{a^2}$.

上述三个不等式中等号均在同一时刻 $x=a-x$ 时成立,由 $\frac{8}{a^2}\geqslant 2\Rightarrow 0<a\leqslant 2$,故实数 a 的范围为(0,2].

点评 本题求解中，三次利用了基本不等式的变式.虽然过程不长，但历经“曲折”.当结论产生之后，回首过程时，你也许会看到基本不等式是多么地“迷人”.

例 6 函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，

(1)当 $b^2>4a^2$ 时，在$[-1,1]$上是否存在一个 x 值使得$|f(x)|>b$；

(2)当 a,b,c 均为整数，且方程$f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两根，求证：$|a|\geqslant 4$.

解析 (1)由 $b^2>4a^2\Rightarrow -\dfrac{b}{2a}>1$ 或$-\dfrac{b}{2a}<-1$，此时，$f(x)$在$[-1,1]$上单调.若存在，由$|f(x)|>b\Rightarrow f(x)>b$ 或$f(x)<-b$.

当$f(x)$在$[-1,1]$上递增时，$f(1)>b$ 或$f(-1)<-b$，即 $a+c>0$ 或 $a+c<0$.

显然，$a+c=0$ 时，不存在；$a+c\neq 0$ 时，存在.

同理，$f(x)$在$[-1,1]$上递减时亦有上述结论.

(2)设$f(x)=0$ 的两根分别为 x_1,x_2，则 $0<x_1<1$，$0<x_2<1$，此时，设$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

由$f(0)f(1)=a^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)\leqslant a^2(\dfrac{x_1+1-x_1}{2})^2(\dfrac{x_2+1-x_2}{2})^2=\dfrac{1}{16}a^2$.

由于$f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两根，因此$f(0)>0$，$f(1)>0$，又 a,b,c 均为整数，得$f(0)\geqslant 1$，$f(1)\geqslant 1$，则 $f(0)f(1)\geqslant 1$，

$\therefore 1\leqslant\dfrac{1}{16}a^2\Rightarrow|a|\geqslant 4$.

点评 本题的综合性较强，它将二次不等式与二次函数有机地结合在一起. 第一问利用二次函数的单调性；第二问利用二次函数的“零点式”、基本不等式等，可以看出，在第二问求解中，基本不等式起到至关重要的作用.

应用四：证明问题

证明问题是基本不等式的常规题型之一. 在对不等式的证明过程中，有时应用基本不等式进行和与积不等关系的相互转换；有时应用基本不等式的各种变式.

例 7 已知 $a>2$ 时，求证：$\log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.

证明 由 $a>2$，得 $\log_a(a-1)>0$ 且 $\log_{(a+1)}a>0$.

又$\dfrac{\log_a(a-1)}{\log_{(a+1)}a}=\log_a(a-1)\cdot\log_a(a+1)\leqslant[\dfrac{\log_a(a-1)+\log_a(a+1)}{2}]^2=[\dfrac{\log_a(a^2-1)}{2}]^2<(\dfrac{\log_a a^2}{2})^2=1$，从而 $\log_a(a-1)<\log_{(a+1)}a$.

点评 本题证明过程中，将积的式子应用基本不等式转化为和的式子，使对数的性质得以充分应用，从而结论合理产生.

例 8 设 $\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant 2$，求证：$2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<8$.

证明 由 $a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$，得$\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant\sqrt{2(2x-3+15-3x)}=\sqrt{24-2x}$.

$2\sqrt{x+1}+\sqrt{24-2x}\leqslant\sqrt{2(4x+4+24-2x)}=2\sqrt{14+x}\leqslant 2\sqrt{14+2}=8$.

上述第一个不等式中等号成立的条件为：$2x-3=15-3x\Rightarrow x=\dfrac{18}{5}\notin[\dfrac{3}{2},2]$，故原不等式成立.

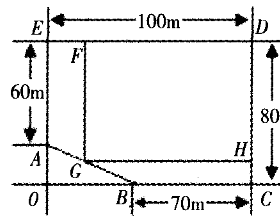
点评 由 $2ab\leqslant a^2+b^2\Leftrightarrow(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\Leftrightarrow a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$，本题就是利用最后的变式完成证明的.当然，在利用过程中根据题目特点，既有灵活性，也有技巧性.

应用五：实际应用问题

高考紧跟时代步伐，围绕社会热点命制应用题是十分常见的.看看 2008 年广东高考文科卷，就是建立在基本不等式的基础上，设计的楼房造价问题.本文也设计一道关于房地产方面的应用题.

例 9 某房地产公司要在荒地 $ABCDE$ 上划出一块长方体地面修建一幢公寓楼，问如何设计才能使公寓的面积最大，并求其最大面积.

解析 如图，分别以 BC,AE 边所在直线为 x 轴、y 轴建立直角坐标系，则



直线 AB 的方程为$\dfrac{x}{30}+\dfrac{y}{20}=1$.设另一顶点为 $G(3x,20-2x)$，那么矩形 $GHDF$ 的面积 $S=(100-3x)[80-(20-2x)]=\dfrac{1}{6}(200-6x)(180+6x)\leqslant\dfrac{1}{6}(\dfrac{200-6x+180+6x}{2})^2=\dfrac{18050}{3}$，当且仅当 $100-3x=80-(20-2x)$，即 $x=\dfrac{5}{3}$时，等号成立.

故在线段 AB 上取点 $G(5,\dfrac{50}{3})$，过 G 分别作 AE，BC 的平行线 DE 交于 F、交 CD 于 H，则矩形 $GHDF$ 的面积最大，其值为$\dfrac{18050}{3}$.

点评 房地产是近年倍受关注的行业，针对房地产的命题也随之诞生.本题的求解借助直线方程，通过直线方程进行设点，然后利用基本不等式产生问题的结论.

应用六：交汇性问题

不等式的交汇性是人所共知的，可以说，没有不等式不能交汇的.此类题既可以是基础题，也可以是高难度的解答题，君不见：数列中不等式呈强、导数中不等式泛滥、解几中不等式压轴、函数中不等式随处可见.不等式的交汇性是高考命题的热点，必须引起高度重视.

例 10 定长为 3 的线段 AB 的两端点在 $y^2=x$ 上移动，AB 的中点为 M，求 M 点到 y 轴的最短距离.

解析 设 $A(x_1^2,x_1)$，$B(x_2^2,x_2)$，$M(x,y)$，

则$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=2x,\\x_1+x_2=2y,\\(x_1^2-x_2^2)^2+(x_1-x_2)^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=2x,\\2x_1x_2=4y^2-2x,\\(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]=9.\end{cases}$

由于$(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]\geqslant 2\sqrt{(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]}=6$，即 $4x+1\geqslant 6$，得 $x\geqslant\dfrac{5}{4}$，其中等号成立的条件为$(x_1-x_2)^2=[(x_1+x_2)^2+1]$，即 $4x_1x_2=-1$，也就是 $4y^2-2x=-\dfrac{1}{2}$，结合 $x=$

$\frac{5}{4}$，得到 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，故最短距离为$\frac{5}{4}$，此时点 M 的坐标为$(\frac{5}{4},\pm\frac{\sqrt{2}}{2})$.

点评 本题是解几问题，但求解中的关键是基本不等式. 通过合理的应用基本不等式使条件恰到好处地得到了应用，既方便了求解，也优化了解题过程.

例 11 设数列$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列，s_n 为前 n 项和，试问：是否存在常数 c，使得：$\frac{1}{2}[\lg(s_n-c)+\lg(s_{n+2}-c)]=\lg(s_{n+1}-c)$成立？证明你的结论.

解析 由 $s_ns_{n+2}-s_{n+1}^2=s_n(a_1+qs_{n+1})-s_{n+1}(a_1+qs_n)=a_1(s_n-s_{n+1})=-a_na_{n+1}<0$，若 c 存在，则$(s_n-c)(s_{n+2}-c)=(s_{n+1}-c)^2\Rightarrow s_ns_{n+2}-s_{n+1}^2=c(s_n+s_{n+2}-2s_{n+1})=c[(s_n-c)+(s_{n+2}-c)-2(s_{n+1}-c)]\geqslant c[2\sqrt{(s_n-c)(s_{n+2}-c)}-2(s_{n+1}-c)]=0$.

显然，与 $s_ns_{n+2}-s_{n+1}^2<0$ 矛盾，故常数 c 不存在.

点评 本题是一道探索性试题，在假定存在的前提下进行推理，通过出现矛盾，产生了不存在的结论，整个过程短小精悍，“数学味”极浓.

应用七：创新型问题

创新型试题，由于背景公平，因而具有较强的选拔功能.近年高考在试题设计上，此类题随处可见.基本不等式是十分活跃的内容，它是产生创新型试题的重要“沃土”.

例 12 无穷正数列$\{x_n\}$，具有以下性质：$x_0=1$，$x_{i+1}\leqslant x_i$ $(i=0,1,2\cdots)$，

(I)试证：对具有上述性质的任一数列，总能找到一个 $n\geqslant1$，使它以后的所有项，都满足不等式$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant3.999$；

(II) 寻求一个数列使不等式$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$对一切自然数 n 都成立；

解析 (I)由已知得：$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant x_{n-1}$，$\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+x_{n-1}\geqslant2x_{n-2}$，$\frac{x_{n-3}^2}{x_{n-2}}+\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant\frac{x_{n-3}^2}{x_{n-2}}+2x_{n-2}\geqslant2\sqrt{2}x_{n-3}=2^{1+\frac{1}{2}}x_{n-3}$，…，$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}}x_0$，由于 $x_0=1$，又 $1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$，由 $2^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}\geqslant3.999$，即$\frac{1}{2^{n-1}}\leqslant2-\frac{\lg3.999}{\lg2}\Rightarrow n\geqslant1+\frac{1}{\lg2}\cdot\lg(\frac{\lg2}{\lg4-\lg3.999})$.

由于$\{x_n\}$是无穷数列，那么$[1+\frac{1}{\lg2}\cdot\lg(\frac{\lg2}{\lg4-\lg3.999})]$(取整数部分)以后的所有项，都满足不等式$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant3.999$.

(II)结合等比数列，不妨设数列$\{x_n\}$是首项为 q，公比也为 q 的等比数列，则$\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=q^{n-2}$，取 $q=\frac{1}{2}$，此时 $x_n=(\frac{1}{2})^n$，则 $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}=2+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}<4$,

故满足条件的数列$\{x_n\}$的通项为：$x_n=(\frac{1}{2})^n$.

点评 本题的两问很新颖，第一问巧妙应用基本不等式后，将问题转化为解不等式与寻找理想的 n；第二问要结合题目要求进行构造，只要构造的结果符合要求即可.可以看出，满足条件的数列不唯一.

应用八：综合问题

由于不等式的灵活性与巧妙性，决定了它是选拔优秀人才的重要题材. 基本不等式的综合应用是设计高难度试题重要基地.

例 13 若方程 $f(x)=x^2+ax+b$ 的两实根均为非整数，试探求 $a.b$ 满足什么条件时，一定存在整数 n，使$|f(n)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

证明 设方程 $f(x)=0$ 的两根分别为 α,β，且 $m<\alpha<m+1$(其中 m 为整数)，则 $f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$，又由于 β 也是非整数，因而 $\beta\neq m$，且 $\beta\neq m+1$.

(1)若 $m<\beta<m+1$，则$|f(m)|\cdot|f(m+1)|=|(m-\alpha)(m-\beta)(m+1-\alpha)(m+1-\beta)|\leqslant(\frac{\alpha-m+m+1-\alpha}{2})^2\cdot(\frac{\beta-m+m+1-\beta}{2})^2=(\frac{1}{4})^2$.

显然，必有$|f(m)|\leqslant\frac{1}{4}$或$|f(m+1)|\leqslant\frac{1}{4}$，此时整数 n 一定存在.

(2)若 $\beta<m$，则$|f(m)|\cdot|f(m+1)|=|(m-\alpha)(m-\beta)(m+1-\alpha)(m+1-\beta)|=|[(\alpha-m)(m+1-\beta)]\cdot[(m-\beta)(m+1-\alpha)]|\leqslant[\frac{(\alpha-m)(m+1-\beta)+(\beta-m)(m+1-\alpha)}{2}]^2=(\frac{\alpha-\beta}{2})^2=(\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2})^2$,

显然，若$(\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2})^2\leqslant(\frac{1}{4})^2$，即 $4a^2-16b\leqslant1$ 时一定存在整数 n，使$|f(n)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

同理可得 $\beta>m+1$ 时，结论同上.

综合可知：当 $4a^2-16b\leqslant1$ 时一定存在整数 n，使$|f(n)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

点评 本题是一道探索性试题，求解过程有两大特点：第一，对根所在区间进行分类；第二，在每一类中灵活应用基本不等式.抓住这两个特点，就抓住了求解的关键.

关于基本不等式的应用就谈到此，当你掩卷时，有何感想呢？是为了解了基本不等式的试题类型而高兴，还是为见到基本不等式诸多灵活应用而惊讶呢？相信，你一定会有自己的答案.

责任编校　徐国坚