挖掘函数图像的解题功能

■中山市第一中学 许少华

函数图像是函数的重要表达形式之一，它可以直观地反映函数的变化情况，它将函数的各种性质及特点无一保留地展现在你的面前.正因为如此，函数图像也具有较强的解题功能，很多看似复杂的问题，通过函数图像便可轻松地获得解决.本文将向你展示函数图像的解题功能，也许对你全面了解函数图像会有所帮助.请看：

一、图像——可以判断函数值的符号

图像在 x 轴的上方与下方决定了对应点函数值的符号，显然，观察图像可以轻松地判断函数值的符号.

例1 设二次函数，$f(x)=x^2+x+a(a>0)$，若存在实数 m，使 $f(m)<0$，则必有(　　)

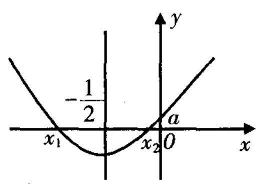
A. $f(m-1)<0$ 且 $f(m+1)<0$

B. $f(m-1)>0$ 且 $f(m+1)<0$

C. $f(m-1)<0$ 且 $f(m+1)>0$

D. $f(m-1)>0$ 且 $f(m+1)>0$

解析 结合 $f(x)$ 的图像我们知道，该图像过点 $(0,a)$，由于存在实数 m，使 $f(m)<0$，那么图像与 x 轴有两个交点，设其横坐标分别为 x_1、x_2，



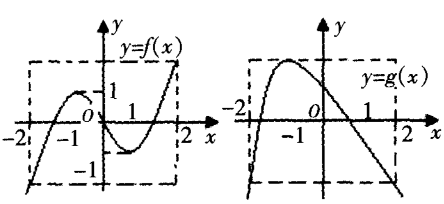
又由对称轴为 $x=-\frac{1}{2}$，得 $x_2\in(-\frac{1}{2},0)$，显然 $|x_2-x_1|<1$，即区间的长度小于1.因此，$m+1$ 与 $m-1$ 必在区间 (x_1,x_2) 外，于是 $f(m-1)>0$ 且 $f(m+1)>0$，故答案为D.

点评 *本题在判断函数值符号时，关键要找到 $m+1$ 与 $m-1$ 所在的位置，通过这个位置产生结论.*

二、图像——可以判断交点的个数

通过图像进行观察，可以发现两函数图像的交点个数，也可以发现函数图像与 x 轴或者特殊直线的交点个数.

例2 已知函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在 $[-2,2]$ 的图像如下所示：



给出下列四个命题：①函数 $f[g(x)]$ 与 x 轴有且仅有6个交点；②函数 $g[f(x)]$ 与 x 轴有且仅有3个交点；③函数 $f[f(x)]$ 与 x 轴有且仅有5个交点；④函数 $g[g(x)]$ 与 x 轴有且仅有4个交点，其中正确命题的个数是(　　)

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

解析 借助图像可以看出函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的零点数量与零点范围，面对四个命题必须逐一分析，最终产生结论.函数 $y=f(x)$ 与 x 轴的交点有三个，其中一个是原点，设另两个横坐标分别 t_1,t_2.对于命题①，当 $g(x)=t_1$ 时，方程 $f[g(x)]=0$ 有两个根；当 $g(x)=0$ 时，方程 $f[g(x)]=0$ 也有两个根；当 $g(x)=t_2$ 时，方程 $f[g(x)]=0$ 有两个根，因此命题①正确.类似地分析命题③④也正确.对于②方程 $g[f(x)]=0$ 有四个根，故答案为B.

点评 *函数图像与 x 轴的交点，也就是相应方程的根.本题在分析与 x 轴交点时有一定的难度，将两个函数的零点结合在一起，既要看函数的零点又要看对应的值的范围，稍有粗心，便会出错.*

三、图像——可以求解参数范围

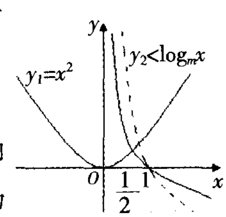
参数的范围问题是我们经常遇到的，在求解过程中方法也多种多样，其中利用函数图像进行求解具有较强的直观性.

例3 若 $x^2<\log_m x$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 内恒成立，则实数 m 的范围为(　　)

A. $\frac{1}{16}\leqslant m<\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{16}\leqslant m<\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{16}\leqslant m<\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{16}\leqslant m<1$

解析 如图，由于 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y_1=\frac{1}{4}$，又由两函数相交时，$y_2=\frac{1}{4}$.由 $\frac{1}{4}=\log_m\frac{1}{2}\Rightarrow m^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$，得 $m=\frac{1}{16}$.



又 $x^2<\log_m x$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 内恒成立，因此，实数 m 的范围为 $\frac{1}{16}\leqslant m<1$，故选D.

点评 *由 $m=\frac{1}{16}$ 产生"$x^2<\log_m x$ 在 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 内恒成立时，m 的范围为 $\frac{1}{16}\leqslant m<1$"必须结合图像进*

行分析，否则很难产生结论.

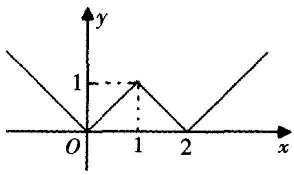
四、图像——可以产生单调区间

函数的单调性是函数的一个重要性质，单调区间的产生可以结合单调性的定义也可以结合函数图像，其中通过图像会更方便.

例4 已知$f(x)=\dfrac{|1-x^2|}{1+|x|}$，则函数$g(x)=f(x-1)$的单调增区间为__________.

解析 由于$f(x)=\begin{cases}-x-1,(x<-1)\\x+1,(-1\leqslant x<0)\\-x+1,(0\leqslant x<1)\\x-1,(x\geqslant 1)\end{cases}$那么$g(x)=f(x-1)$

$=\begin{cases}-x,(x<0)\\x,(0\leqslant x<1)\\-x+2,(1\leqslant x<2)\\x-2,(x\geqslant 2)\end{cases}$图像如下图所示：



由图像可知，函数$g(x)=f(x-1)$的单调递增区间为$(0,1]\cup(2,+\infty)$.

点评 本题的难点有两处：其一，转化函数$f(x)$；其二，产生函数$f(x-1)$的解析式.当这两点攻破之后，作图与写单调区间就轻松了很多.

五、图像——可以讨论方程的根

方程的根与图像的交点有着千丝万缕的联系，将方程问题转化为函数问题，通过对函数图像的分析与讨论产生结论是常见的处理方法之一.

例5 关于x的方程$(x^2-1)^2-|x^2-1|+k=0$，给出下列四个命题：

①存在实数k，使得方程恰有2个不同的实根；

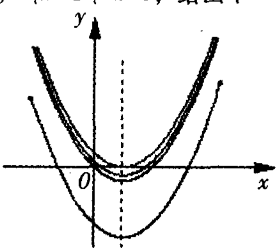
②存在实数k，使得方程恰有4个不同的实根；

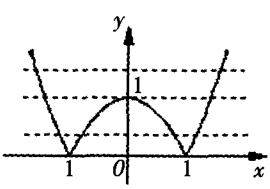
③存在实数k，使得方程恰有5个不同的实根；

④存在实数k，使得方程恰有8个不同的实根，其中假命题的个数是(　　)

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 3





解析 设$|x^2-1|=t$，$f(t)=t^2-t+k$，k变化时二次函数上下移动，观察$f(x)=t^2-t+k$非负零点的个数可得$|x^2-1|=t$解的情况：

当时$t=\dfrac{1}{4}$，有4个根；当$t=0,1$时，有5个根；

当$0<t_1<t_2<1$时，有8个根；当$t>1$时，有2个根.

点评 本题看似简单，其实并不容易.首先要引入参数t，然后再转化为关于t的二次函数，通过$f(t)=t^2-t+k$非负零点的个数来产生结论，数学的“巧”与“活”在本题中都得以展现.

六、图像——可以处理恒成立问题

恒成立问题是一类常见问题，它的常规求解方法是借助最值进行转化.在转化过程中，图像往往会起关键作用.

例6 函数$y=a^x$与$y=\log_a x(0<a<1)$的图像的唯一交点的横坐标为x_0，是否存在实数t，使$0<x<x_0$时，不等式$5ta^x+(4-3t)\log_a x>0$恒成立？若存在，求t的值或所在范围；若不存在，说明理由.

解析 结合图像易知$0<x_0<1$，当$0<x<x_0$时，$\dfrac{a^x}{\log_a x}\in(0,1)$.那么不等式$5ta^x+(4-3t)\log_a x>0$可转化为$5t\cdot\dfrac{a^x}{\log_a x}+(4-3t)>0$.令$a=\dfrac{a^x}{\log_a x}$，则$f(a)=5ta+(4-3t)>0$，当$a\in(0,1)$时恒成立，则$\begin{cases}f(0)\geqslant 0,\\f(1)\geqslant 0,\end{cases}$也就是$\begin{cases}5t\cdot 0+(4-3t)\geqslant 0,\\5t\cdot 1+(4-3t)\geqslant 0\end{cases}$

$\Rightarrow -2\leqslant t\leqslant\dfrac{4}{3}$，于是实数$t$存在，其范围为$[-2,\dfrac{4}{3}]$.

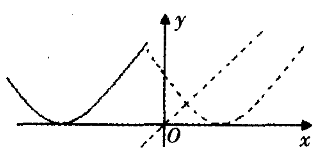
点评 本题在最关键时候，通过构造函数，结合一次函数的图像特征，使问题发生了较大的转折，这里一次函数的图像特征的利用非常巧妙，具有欣赏价值.

七、图像——可以求解不等问题

不等问题是数学问题的主流，随便找一道数学题，都可能与不等有关.将不等问题与函数图像结合起来，使不等问题变得更加直观、更易于接受.

例7 设二次函数$f(x)=-ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R}$且$a\neq 0)$满足条件：①当$x\in\mathbf{R}$时，$f(x-4)=f(2-x)$且$f(x)\geqslant x$；②$x\in(0,2)$时，$f(x)\leqslant(\dfrac{x+1}{2})^2$；③$f(x)$在R上的最小值为0，求最大的$m$ $(m>1)$使得存在$t\in\mathbf{R}$，只要$x\in[1,m]$就有$f(x+t)\leqslant x$.

解析 由$f(x-4)=f(2-x)$得对称轴方程为$x=-1$，又$f(x)$在R上的最小值为0，因此，可设$f(x)=a(x+1)^2$.再由$x\leqslant f(x)\leqslant(\dfrac{x-1}{2})^2$.令$x=1$得$f(1)=1$，因此$a=\dfrac{1}{4}$，$\therefore f(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$.



由于$f(x+t)$的图像是由$f(x)$的图像向左（或向右）平移$|t|$个单位所得，欲使存在t使$x\in[1,m]$时，有$f(x+t)\leqslant x$，则必须向右平移，并且1和m分别是方程$f(x+t)=x$的两根，即$\dfrac{1}{4}(x+t+1)^2=x$的两根

分别为 1 和 m，得 $t=-4$，$m=9$.

点评 本题的三个条件与待处理的结论中都含有不等式，因此是实实在在的不等问题，对问题进一步分析时，发现利用图像进行处理很妙，也很方便.

八、图像——可以求解最值问题

函数最值与函数图像的联系是人所共知的，借助于图像，通过单调性或图像的其它特征求函数最值也是十分常见的方法.

例 8 是否存在非零实数 a，使函数 $f(x)=ax^2+(a-2)x+1$ 在 $[-2,3]$ 上的最大值为 $\frac{3}{4}$，若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

解析 本题常规思路首先分两类 $a>0$ 及 $a<0$.在每类中再分三种情况，即对称轴在 $[-2,3]$ 的左、中、右；然后，综合六种情况产生结论，其过程相当麻烦.我们不妨转变一下思路，看在闭区间上函数的最值会在哪些地方取得？由于二次函数在闭区间上的图像是一段连续的弧，因此，最值只能在端点或极值点处取得，于是有：

(1) 若 $f(-2)=\frac{3}{4}$，得 $a=-\frac{17}{8}$，此时的抛物线开口向下，对称轴方程为 $x=-\frac{33}{34}\in[-2,3]$，显然 $f(-2)$ 不可能是最大值，所以 $a\neq-\frac{17}{8}$.

(2) 若 $f(-\frac{a-2}{2a})=\frac{3}{4}$，即 $a\cdot(-\frac{a-2}{2a})^2+(a-2)\cdot(-\frac{a-2}{2a})+1=\frac{3}{4}\Rightarrow a^2-5a+4=0$，得 $a=1$ 或 $a=4$.

①当 $a=1$ 时，抛物线开口向上，且对称轴为 $x=\frac{1}{2}\in[-2,3]$，此时 $f(\frac{1}{2})$ 是最小值而不是最大值，因此 $a\neq1$；

②当 $a=4$ 时，抛物线开口向上，且对称轴为 $x=-\frac{1}{4}\in[-2,3]$，此时 $f(-\frac{1}{4})$ 是最小值而不是最大值，因此 $a\neq4$.

(3) 若 $f(3)=\frac{3}{4}$，得 $a=\frac{23}{48}$，抛物线开口向上，且对称轴为 $x=\frac{73}{46}\in[-2,3]$，此时，在 $[-2,3]$ 内 $f(-2)$ 是最大值，因此 $a\neq\frac{23}{48}$.

综合(1)(2)(3)可知满足条件的 a 不存在.

点评 数学中很多问题若是循规蹈矩地求解，难度会很大，甚至难以求解.倘若打破常规，转变思路，往往会“柳暗花明”，以巧制胜.本题抓住图像特征，使问题巧妙获解.

九、图像——可以求解充要条件问题

充要条件具有较强的严谨性与抽象性，它不仅要求原命题成立也要求逆命题也成立.对一个充要条件问题进行分析，将其转化为函数问题，再结合函数图像，也许抽象性一下子降低了很多.

例 9 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实根 α，β，试证明：$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$ 的充要条件为 $2|a|<4+b$ 且 $|b|<4$.

证明 (1) 必要性.由于 $f(x)=x^2+ax+b$ 的图像是开口向上的抛物线，且与 x 的两交点满足 $|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，那么必有 $f(\pm2)>0$，即 $4+2a+b>0$ 且 $4-2a+b>0$，也就是 $2|a|<4+b$.又由韦达定理，得 $|b|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|<4$.

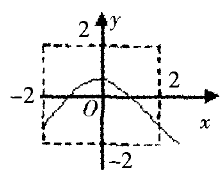
(2) 充分性.由 $2|a|<4+b$，得 $4+2a+b>0$ 且 $4-2a+b>0$，即 $\begin{cases}f(-2)>0,\\ f(2)>0,\end{cases}$ 于是两根落在区间 $(-2,2)$ 之内或区间之外.若两根均落在区间 $(-2,2)$ 之外，则 $|b|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|>4$ 与 $|b|<4$ 矛盾，故两根均落在区间 $(-2,2)$ 之内.因此，$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$.

点评 初看此题，感觉“高不可攀”，当把它转化为二次函数，再与二次函数的图像联系到一起后，难度降低了，只是要求作一般的分析与推理.

十、图像——可以求解探索性问题

探索性问题具有新颖性，由于它的结论是未知的，常规的解题目标也不存在了，因此，有一定的难度，若将其与函数联系起来，再通过图像进行分析，也许思路慢慢地就产生了.

例 10 是否存在实数对 (p,q)，使 $x^2-px-q>2$ 或 $x^2-px-q<-2$ 在区间 $(-2,2)$ 内无解？



解析 设 $f(x)=-x^2+px+q$，若实数对 (p,q) 存在，结合图像，

则 $\begin{cases}f(-2)\geqslant-2,\\ f(2)\geqslant-2,\\ f(-\frac{p}{2})\leqslant2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2p+q-2\geqslant0\cdots\cdots(1)\\ 2p+q-2\geqslant0\cdots\cdots(2)\\ \frac{3p^2}{4}-q+2\geqslant0\cdots\cdots(3)\end{cases}$

由(1)+(3)得：$p\geqslant\frac{8}{3}$ 或 $p\leqslant0$；(2)+(3)得：$p\leqslant-\frac{8}{3}$ 或 $p\geqslant0$，故存在实数对 $(0,2)$ 满足题意.

点评 本题表面上看难度很大，将其内容与图像结合起来，难度得到了化解，欲使“$x^2-px-q>2$ 或 $x^2-px-q<-2$ 在区间 $[-2,2]$ 内无解”，其实就是函数 $f(x)=-x^2+px+q$ 在区间 $[-2,2]$ 内的最小值与最大值与 -2 及 2 之间的关系.

从上述函数图像十大解题功能中，我们看出图像在解题上确实存在其优胜之处.它是函数的重要内容之一，在处理很多问题时都有意想不到的应用，因此，重视函数图像是应该的，也是必须的.

责任编校　徐国坚