谈高考复数的命题

■中山一中　许少华

复数在近年高考中属降低要求的内容,但由于它仍然代表一个“知识块”,因此始终未被高考遗忘.无论是全国统一命题还是部分省市的自主命题,在高考试卷中都可以见到复数的“身影”.注重对复数进行复习依然非常重要,下面让我们一起来关注一下复数的常见题型.

一、运算规律型

例1 $i^{n+1}+i^{n+2}+\cdots+i^{n+2008}(n\in\mathbf{N}^*)=(\quad)$

A i^{n+3}　　B 0　　C 1　　D i

解析 由 $i^{n+1}+i^{n+2}+\cdots+i^{n+2008}=i^n\cdot\dfrac{1-i^{2008}}{1-i}=0$, 选 B.

点评 此类型的问题是复数题最可能出现的形式,主要考查对复数运算规律的掌握与应用,当中融汇了数列的求和公式的运用,体现了数学题型的交汇性;也考查了虚数单位的方幂的周期性,对于 $i^2=-1$ 及 $(a+ai)^2=2a^2i$, 我们也要有所重视.

二、基本运算型

例2 设 1, $a+bi$, $b+ai$ 是一等比数列的连续三项,则 a, b 的值分别为______.

解析 由 $(a+bi)^2=b+ai\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=b,\\2ab=a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\b=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

点评 此类问题就是复数的基本运算,谈不上什么技能技巧,只要老老实实运算,就能产生结论.

三、基本概念型

例3 对于复数 $z=(1+i)m^2-(1+3i)m-2+2i$, 当 $m=$____时, z 是实数;当 $m=$____时, z 是虚数;当 $m=$____时, z 是纯虚数.

解析 由 $z=(1+i)m^2-(1+3i)m-2+2i=(m+1)(m-2)+(m-2)(m-1)i$,

(1)当 $(m-2)(m-1)=0\Rightarrow m=1$ 或 $m=2$ 时, z 为实数;

(2)当 $(m-2)(m-1)\neq0\Rightarrow m\neq1$ 且 $m\neq2$ 时, z 为虚数;

八、应用直线系方程漏解引发的错误

例10 过两直线 $x+y-1=0$ 和 $2x-y+4=0$ 的交点,且到原点的距离为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ 的直线方程.

错解 设所求直线为 $x+y-1+\lambda(2x-y+4)=0$, 即 $(2\lambda+1)x+(1-\lambda)y+4\lambda-1=0$. 由题意得 $\dfrac{|4\lambda-1|}{\sqrt{(2\lambda+1)^2+(1-\lambda)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, 解得 $\lambda=-\dfrac{3}{8}$,故所求直线方程为 $2x+11y-20=0$.

正解 原点到直线 $2x-y+4=0$ 的距离也为 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$. 一般地, $f_1+\lambda f_2=0$ 表示经过的 f_1、f_2 交点但不包括 f_2 的所有直线,而上述解法恰好漏掉了直线 $2x-y+4=0$, 故应先分类讨论.所以满足条件的直线方程为 $2x+11y-20=0$ 和 $2x-y+4=0$.

点评 此题特殊情况就在于原点到两直线 $x+y-1=0$ 和 $2x-y+4=0$ 的交点的距离正好等于原点到直线 $2x-y+4=0$ 的距离 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$, 而直线系 $x+y-1+\lambda(2x-y+4)=0$ 又不包括直线 $2x-y+4=0$,所以极易漏掉直线 $2x-y+4=0$.

九、位置关系考虑不周引发的错误

例11 直线 l 过点 $M(1,2)$ 且 $A(2,3)$、$B(4,-5)$ 到直线 l 的距离相等,求直线 l 的方程.

错解 由题意,所求直线过 $M(1,2)$ 且与 AB 平行,而 $k_{AB}=-4$, 故所求直线方程为 $y-2=-4(x-1)$, 即 $4x+y-6=0$.

正解 上面的解法中遗漏了另一种情况, B、A 分别位于直线 l 的两侧且到 l 的距离相等的情况.易知,此种情况下,直线 l 必过 AB 的中点 $N(3,-1)$, 又直线 l 过点 M, 因此,直线方程为 $3x+2y-7=0$.故所求直线方程应为 $4x+y-6=0$ 或 $3x+2y-7=0$.

点评 点 A、B 在直线 l 的同侧时,直线 AB 与直线 l 平行;在点 A、B 在直线 l 的异侧时,直线 AB 与直线 l 相交,学生在做题时,极易只考虑平行情况而出错.

责任编校　徐国坚

(3) 当$\begin{cases}(m+1)(m-2)=0,\\(m-2)(m-1)\neq 0\end{cases}\Rightarrow m=-1$ 时，z 为纯虚数.

点评 当复数降低要求之后，高考命题以考查基本概念为主.今年考试说明明确说要考连续型的填空题，那么考此类题就有很大的可能性.

四、基本方程型

例 4 已知关于 x,y 的方程组$\begin{cases}(2x-1)+i=y-(3-y)i,\\(2x+ay)-(4x-y+b)i=9-8i\end{cases}$有实数解，则实数 $a+b=$________.

解析 不妨令 x，y 为实数，由方程组中的第一个方程得$\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{2},\\y=4,\end{cases}$将结果代入到第二个方程中去，得 $5+4a-(10-4+b)i=9-8i$.由两复数相等，得$\begin{cases}5+4a=9,\\10-4+b=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=2,\end{cases}$所以 $a+b=3$.

点评 复数中的方程问题很多，如实系数的一元二次方程有虚根，及复系数一元二次方程有虚根等都是考生容易出错的问题，因而也是高考命题容易出新之处.

五、交汇型

例 5 已知 $z_1=x^2+i\sqrt{x^2+1}$，$z_2=(x^2+a)i$ 对于任意实数 x，都有$|z_1|>|z_2|$恒成立，试求 a 实数的范围.

解析 由$|z_1|>|z_2|$恒成立，得 $x^4+x^2+1>(x^2+a)^2$ 恒成立，即$(1-2a)x^2+(1-a^2)>0$ 对于任意实数恒成立.

(1) 当 $1-2a=0$，即 $a=\dfrac{1}{2}$时，不等式恒成立；

(2) 当 $1-2a\neq 0$ 即 $a\neq\dfrac{1}{2}$时，得

$\begin{cases}1-2a>0,\\\triangle=0-4(1-2a)(1-a^2)<0\end{cases}\Rightarrow -1<a<\dfrac{1}{2}$.

综合 (1) (2) 得实数 a 的范围为$-1<a\leq\dfrac{1}{2}$.

点评 以复数为载体，重在考查其它章节的知识是复数中交汇性命题的一种方式.本题其实是考查二次不等式恒成立问题及分类讨论思想的应用.

六、开放型

例 6 设点 P 是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 上的任意一点，以$|OP|$为边长作矩形 $OPQR$（字母按逆时针方向排列）使$|OR|=2|OP|$，试问：是否存在两定点,使点 R 到该两定点距离之和为定值，若存在，求出两定点坐标；若不存在，请说明理由.

解析 由椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$,可知 $a^2=9,b^2=5\Rightarrow c^2=4$,设点 P 对应的复数为 z,则椭圆的复数方程为$|z+2|+|z-2|=6$.

再设点 R 对应的复数为 z'，由 $OPQR$ 为矩形且$|OR|=2|OP|$，得 $z'=2iz\Rightarrow z=\dfrac{z'}{2i}$.

那么$\left|\dfrac{z'}{2i}+2\right|+\left|\dfrac{z'}{2i}-2\right|=6$，即$|z'+4i|+|z-4i|=12$.显然，对于点 R 存在两定点$(0,-4)$与$(0,4)$使点 R 到该两定点距离之和为定值 12.

点评 本题具有开放性，初看此题可能会感觉不知从何下手,但细想椭圆定义，也许思路会立刻产生.本题也可以认为是利用复数求轨迹的典范，它也开辟了求轨迹问题思路空间.

七、综合题

例 7 设复数 z 满足$|z|=5$,且$(3+4i)z$ 在复平面上对应的点在第二、四象限的角平分线上,若$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}$ $(m\in\mathbf{R})$,求 z 和 m 的值.

解析 设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，由$|z|=5$，得 $x^2+y^2=25$.$(3+4i)z=(3+4i)(x+yi)=(3x-4y)+(4x+3y)i$.又因为 $(3+4i)z$ 在复平面上对应的点在第二、四象限的角平分线上，所以$(3x-4y)+(4x+3y)=0$，得 $y=7x$.

由$\begin{cases}y=7x,\\x^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\y=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\y=-\dfrac{7\sqrt{2}}{2},\end{cases}$

即 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$ 或 $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$.

当 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$ 时，由$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}$，即$|1+7i-m|=5\sqrt{2}$，得 $m=0$ 或 $m=2$;

当 $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$ 时，由$|\sqrt{2}z-m|=5\sqrt{2}$，即$|-1-7i-m|=5\sqrt{2}$，得 $m=0$ 或 $m=2$,

故 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$ 或 $z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{7\sqrt{2}}{2}i$；$m=0$ 或 $m=2$.

点评 长期以来复数总是以选择题与填空题的形式与考生见面，有没有以解答题的形式出现呢？由于，高考命题不刻意追求覆盖面.因此，我们也不能绝对排斥解答题.

好了，关于复数的命题，这里就说这么多，对你有帮助吗？

责任编校 徐国坚