解密2008年高考数学命题

■中山市第一中学　许少华

2008年高考正一步一步地逼近我们,围绕着高考命题的探索也紧锣密鼓地进行着.随着2008年考试大纲的出台,使高考命题的走向渐趋明朗.本文结合考试大纲,对考试中的特殊地方进行解剖,也许会助你高考一臂之力.

解密一　试题创新

回顾历年的高考试题，可以发现每年都有一批创新型试题与考生见面.由于试题新颖,无模式可套,因而,它充分发挥了它的选拔功能.2008年呢？我们关注以下几个方面.

创新点1—"高数"下凡

建立在高数中的某个性质、运算的基础上设计试题,是高考命题的重要思路之一,也是命题创新的不尽源泉.

例1 对字母 A,B,C,D 的任何一个排列定义映射 f 满足: $f(ABCD)=0$, $f(BACD)=1$, $f(BCAD)=0$, $f(BCDA)=1$, $f(DACB)=0$, $\cdots$,根据以上规律,则下列的四个等式中:(1)$f(ACBD)=1$;(2)$f(CDBA)=0$;(3)$f(BDCA)=0$;(4)$f(CADB)=0$,正确等式的序号为__________.

A. (1)(3)　　B. (1)(4)

C. (2)(3)　　D. (2)(4)

解析 由"$ABCD$"到"$BACD$"进行了一次交换;从"$ABCD$"到"$BCAD$"进行了两次交换;从"$ABCD$"到"$BCDA$"进行了三次交换;从"$ABCD$"到"$DACB$"进行了四次交换.于是我们可以猜测:进行奇次交换后,得"1";进行偶次交换后,得"0",所以(1)(3)是正确的,故选A.

评析 本题建立在《高等代数》的基础上,利用"交换"次数的概念设计试题.显然,发现规律有一定的难度.它要求老师在指导高考复习时,要站得高一点,看得远一点.

创新点2—跨跃学科

数学,自然科学的皇后.它与很多学科都有千丝万缕的联系，结合数学知识进行跨学科设计是高考命题的又一创新点.

例2 毛泽东在《送瘟神》中写到:"坐地日行八万里",又知地球的体积大约是火星的8倍,则火星的大圆周长约为________万里.

解析 周长的比等于半径的比、体积的比等于半径的立方比,设地球与火星的半径分别为 R,r,火星的大圆周长约为 x,

由 $\frac{R^3}{r^3}=\frac{8}{1}\Rightarrow\frac{R}{r}=\frac{2}{1}$,因此 $\frac{80000}{x}=\frac{2}{1}\Rightarrow x=40000$,故填四.

评析 此题颇具新意,它是2004年重庆高考题.很多考生看一遍题目,可能不知所云,优美诗句的欣赏也会影响到常规思考.本题的实质就是体积与周长(或弧长)的关系问题.

创新点3—开放设计

开放性试题可以考查考生综合运用知识的能力.可以较好地考查分析问题与解决问题的能力.因此,它是创新设计的重要的思维起点.

例3 某学生在操场中心某方向走10米后，向左转30°,再向前走10米后,再向左转30°,如此下去,试问该学生能否回到原出发点(即操场中心)?若能,请最少需要多少次？若不能,请说明理由.

解析 以操场中心为原点，第一次走10米的方向为 x 轴正方向,建立直角坐标系,且令第一次、第二次、…、第 n 次的终点分别为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，那么 $\overrightarrow{OA_1}=(10,0)$, $\overrightarrow{A_1A_2}=(10\cos30°,10\sin30°)$, $\cdots$, $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=(10\cos(n-1)30°,10\sin(n-1)30°)$,

若能回到原出发点，即 $\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$，也就是

$$\begin{cases}1+\cos30°+\cdots+\cos(n-1)\times30°=0,\\ \sin30°+\cdots+\sin(n-1)\times30°=0.\end{cases}$$

借助单位圆，可知满足上式的 n 是12的倍数,于是,最少要经过12次即可回到原来位置.

评析 本题具有较大的开放性,首先是应用知识不清楚;其次是结论是不确定.虽然,求解过程不太复杂,但产生思路并不轻松.

创新点4—信息迁移

即时给出新定义,创设新情境,在全新的环境下设计试题,具有背景公平利于选拔的特点,是高考命题创新的重要思路之一.

例4 设定义在 $[x_1,x_2]$ 上的函数 $y=f(x)$ 的图像为 C, C 的端点分别为 A,B,M 是 C 上的任意一点,向量 $\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1)$, $\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2)$, $\overrightarrow{OM}=(x,y)$,若 $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2$,记向量 $\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$,现定义"函数 $y=f(x)$ 在

$[x_1,x_2]$上可在标准 k 下线性近似”是指$|\overrightarrow{MN}|\leqslant k$ 恒成立，其中 k 是一个正数.

(1)证明：$0\leqslant\lambda\leqslant 1$；

(2)请你给出一个标准 k 的范围，使得$[0,1]$上的函数 $y=x^2$ 与 $y=x^3$ 中有且仅有一个可在标准 k 下线性近似.

解析 (1)设 $x\in[x_1,x_2]$，则 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$，即 $x_1\leqslant\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\leqslant x_2$，得 $x_1-x_2\leqslant\lambda(x_1-x_2)\leqslant 0$，由于 $x_1-x_2<0$，得 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

(2)由$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB}$，得$\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BA}$，所以 B,N,A 三点共线，由 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$，可知点 N 在线段 AB 上且与点 M 的横坐标相同.

对于$[0,1]$上的函数 $y=x^2$，点 $A(0,0)$，$B(1,1)$则$|\overrightarrow{MN}|=|x-x^2|=\left|-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}\right|$. 显然，$|\overrightarrow{MN}|$的范围为$[0,\frac{1}{4}]$.

对于$[0,1]$上的函数 $y=x^3$，点 $A(0,0)$，$B(1,1)$，则$|\overrightarrow{MN}|=|x-x^3|$，由于 $x\in[0,1]$ 时，函数 $g(x)=x-x^3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$，最小值为 0，即$|\overrightarrow{MN}|$的范围为$[0,\frac{2\sqrt{3}}{9}]$.

由于$\frac{1}{4}<\frac{2\sqrt{3}}{9}$，因此，取 $k\in[\frac{1}{4},\frac{2\sqrt{3}}{9})$时，函数 $y=x^2$ 在$[0,1]$ 上可在标准 k 下线性近似；函数 $y=x^3$ 在$[0,1]$ 上不可在标准 k 下线性近似.

评析 本题中“在标准 k 下线性近似”是引入的新定义，对它的准确理解与合理运用是求解的关键.本题难度不大，但综合了多个方面的知识点，如函数、向量、不等式等.

解密二　思想方法

数学思想是数学的灵魂，是数学方法与技能的实质体现，对解题思路的产生具有指导意义.因此，数学思想方法是每年高考都特别关注的，常考的思想方法有下述四种.

1. 数形结合思想

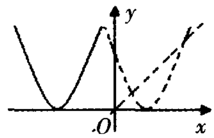
“数少形时缺直观，形少数时难入微。”它准确的告诉我们：数形结合，相得益彰；利用数、式进行深入细致的分析；利用图形直观又可以看出数、式的内在关系.

例 5 二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$($a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0$)满足条件：①当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$且$f(x)\geqslant x$；②$x\in(0,2)$时，$f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$；③$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0；求最大的 m($m>1$)使得存在 $t\in\mathbf{R}$，只要 $x\in[1,m]$就有$f(x+t)\leqslant x$ 成立.

解析 由$f(x-4)=f(2-x)$得对称轴方程为 $x=-1$，又由③知$f(x)=a(x+1)^2$.

再由 $x\leqslant f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$，令 $x=1$ 得$f(1)=1$. 因此，$a=\frac{1}{4}$，$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

由于$f(x+t)$的图像是由$f(x)$的图像向左(或向右)平移$|t|$个单位，欲使存在 t 使 $x\in[1,m]$时，有 $f(x+t)\leqslant x$，则必须向右移且 1 和 m 分别是方程$f(x+t)=x$ 的两根.



即$\frac{1}{4}(x+t+1)^2=x$ 的两根分别为 1 和 m，得 $t=-4$，$m=9$.

评析 本题的第一步要探求$f(x)$的解析式，有了解析式再利用数形结合结论会逐步明晰.

2. 函数思想

根据结构特点，从函数的角度来分析、认识所遇到的问题，通过构造适当函数，利用函数性质促使问题获解.

例 6 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，则(　　)

A. $a>0,b<0,c<0$　　B. $a<0,b<0,c>0$

C. $a<0,b>0,c<0$　　D. $a>0,b>0,c>0$

解析 设$f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$，由于 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，因此 $x>0$ 时，$f(x)>0$.

即图像与 x 轴的正半轴无交点，则三交点$(-a,0)$，$(-b,0)$，$(-c,0)$均在负半轴上，故选 D.

评析 本题借助函数处理得非常漂亮，没有复杂的运算、也不存在烦琐的推导.

3. 化归与转化思想

数学问题的求解过程，实际上是问题的转化过程，条件由隐转化为显，结论由暗转化为明.

例 7 若$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2$，则$\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$的值为(　　)

A. $-\frac{817}{27}$　　B. $\frac{817}{27}$　　C. $\frac{820}{27}$　　D. $-\frac{820}{27}$

解析 由$\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta-\cos\theta}=2\Rightarrow\tan\theta=3$.于是$\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$

$=\frac{\sin\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\cos^3\theta}+\frac{\cos\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\sin^3\theta}=\tan\theta+\tan^3\theta+\frac{1}{\tan^3\theta}+\frac{1}{\tan\theta}=3+27+\frac{1}{27}+\frac{1}{3}=\frac{820}{27}$，故选 C.

评析 本题主要是公式 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 的灵活运用，发现要用这一公式的原因是分子与分母的指数相差是 2，要让指数一致只能用“1”进行处理.

4. 分类讨论思想

“分而治之”是处理问题的一种策略，分类讨论是这种策略的具体体现. 当我们遇到的数学问题情境复杂、层次多、视角广时，我们可以从不同层面，将问题进

行划分，然后逐一加以解决.

例 8 当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 的图像的交点个数(　　)

A. 可能是 0 个、1 个或 2 个

B. 只可能是 2 个

C. 只可能是 0 个

D. 可能是 3 个

解析 假定 $y=a^x$ 与 $y=x$ 相切于 (x_0,y_0)，则切线方程为 $y-a^{x_0}=a^{x_0}(\ln a)\cdot(x-x_0)$. 因为过原点，得 $x_0=\frac{1}{\ln a}$，而 $x_0=y_0=a^{x_0}$，所以 $\frac{1}{\ln a}=a^{\frac{1}{\ln a}}$，从而 $a=e^{\frac{1}{e}}$，那么

(1)若 $a>e^{\frac{1}{e}}$ 时，$y=a^x$ 与 $y=x$ 没有交点，故函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 的图像的交点个数为 0；

(2)若 $a=e^{\frac{1}{e}}$ 时，$y=a^x$ 与 $y=x$ 相切，故函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 的图像的交点个数为 1；

(3)若 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 时，$y=a^x$ 与 $y=x$ 有两个交点，故函数 $y=a^x$ 与函数 $y=\log_a x$ 的图像的交点个数为 2.

综上所得，正确的答案为 A.

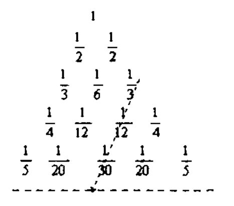
评析 本题凭主观易错选答案 C，当我们对图形能够深入的分析以后会发现真正的正确答案却是 A.

解密三　选修部分

系列一与系列二分别是文科与理科的必修内容，之所以说它“选修”是因为文科不学系列二，理科不学系列一.本部分内容，我们要特别关注下列三类问题.

1. 推理与证明

例 9 下图是“莱布尼茨三角”，不难看出：它与杨辉三角有类似的一条性质即莱布尼茨三角中的每一个数都等于它左右脚下的两数之和.如下图箭头所示，从第三项起将每行的第三个数 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{30}$，…，按由小到大的顺序组成数列 $\{a_n\}$，则该数列的第 10 项为_______.



解析 从第三项起将每行的第二个数 $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{12}$，$\frac{1}{20}$，…，按由小到大的顺序组成数列 $\{b_n\}$，如图易知 $b_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$. 由于 $a_1+b_1=\frac{1}{2}$ 且 $a_n+b_n=b_{n-1}(n\geqslant 2)$，

那么 $a_n=b_{n-1}-b_n=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ $(n\geqslant 2)$. 即 $a_n=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}(n\geqslant 2)$，又 $a_1=\frac{1}{3}$ 也满足，

因此，该数列的第 10 项为 $a_n=\frac{2}{10(10+1)(10+2)}=\frac{1}{660}$.

评析 本题在发现规律上有点难度，可以通过归纳推理产生.解题中，若能将归纳推理与科学、严谨的分析放在一起效果会更好.

2. 回归分析

例 10 某同学次考试的数学 x、语文 y 成绩在班中的排名如下表：

数学成绩(x)	7	6	5	3	2	1
语文成绩(y)	13	11	9	6	4	2

对上述数据分别用 $y=bx+a$ 与 $y=cx^2+d$ 来拟合 y 与 x 之间的关系，并用残差分析两者的拟合效果.(参考数据：$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=50$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=28$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})=400$，$\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=28$).

解析 首先用 $y=bx+a$ 来拟合 y 与 x 之间的关系，

由于 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{50}{80}=1.786$，又 $\bar{x}=4$，$\bar{y}=7.5$，

那么 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=7.5-1.786\times4=0.356$，得回归方程为 $\hat{y}=1.786x+0.356$，此时残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=0.214$.

再用 $y=cx^2+d$ 来拟合 y 与 x 之间的关系，令 $t=x^2$，则排名表为：

t	49	36	25	9	4	1
y	13	11	9	6	4	2

由于 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{6}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{400}{1857.333}=0.215$，又 $\bar{t}=20.667$，$\bar{y}=7.5$，

那么 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\cdot\bar{t}=7.5-0.215\times20.667=3.056$，得回归方程为 $\hat{y}=0.215x+3.056$，此时残差平方和 $\sum\limits_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=3.355$.

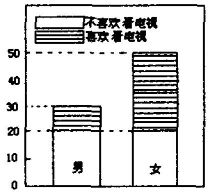
由于 $3.355>0.214$，可知用 $y=bx+a$ 来拟合 y 与 x 之间的关系效果更好.

评析 本题的一大特点是，烦琐的计算题目条件给出了，简单的计算又隐藏起来，想真正产生结论，不真正掌握方法肯定是不行的.

3. 独立性检验

例 11 如下图是对性别与喜欢看电视与否进行统计的二维条形图：

如果统计中男生人数是30人，女生人数是50人，你是否有把握______（是、没有）认为性别与爱看电视有关?若有，你的把握是________.



解析 由于男生人数是30人，从图中可以看出男生中不喜欢看电视的人数为20人，喜欢看电视的人数为10人；女生人数是50人，不喜欢看电视的有20人，喜欢看电视的有30人.

于是，列表如下：

	喜欢看电视	不喜欢看电视	合计
男	10	20	30
女	30	20	50
合计	40	40	80

由于 $K^2=\dfrac{80\times(10\times20-20\times30)^2}{30\times50\times40\times40}\approx5.33>5.024.$

故有把握认为性别与爱看电视有关，其把握为97.5%.

评析 *独立性检验与回归分析一样主要涉及比较复杂的数字运算，倘若将数据设计的理想化一点也就不存在问题了.本题涉及独立性检验的多个知识点，难度不大，考查较为全面.*

解密四　文理差别

1. 随机变量的均值、方差与标准差(理)

本部分内容是近年高考命题的热点，仅看2007年高考试卷就有近十个省市考了这一内容，有趣的是广东却“悄悄”退出了，2007年的退出更暗示了2008年它的“危险性”大.

例12 在一个盒子中，放有标号分别为1,2,3的三张卡片，现从这个盒子中，有放回地先后抽得两张卡片的标号分别为 x、y，记 $\xi=|x-2|+|y-x|$.

(Ⅰ)求随机变量 ξ 的最大值，并求事件“ξ 取得最大值”的概率；

(Ⅱ)求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

解析 (Ⅰ)$\because x$、y 可能的取值为1、2、3，$\therefore |x-2|\leqslant1$，$|y-x|\leqslant2$，$\therefore \xi\leqslant3$，且当 $x=1,y=3$ 或 $x=3,y=1$ 时，$\xi=3$.因此，随机变量 ξ 的最大值为3.$\because$ 有放回抽两张卡片的所有情况有 $3\times3=9$ 种，$\therefore P(\xi=3)=\dfrac{2}{9}$.故随机变量 ξ 的最大值为3，事件“ξ 取得最大值”的概率为 $\dfrac{2}{9}$.

(Ⅱ)ξ 的所有取值为0,1,2,3. $\because \xi=0$ 时，只有 $x=2,y=2$ 这一种情况；$\xi=1$ 时，有 $x=1,y=1$ 或 $x=2,y=1$ 或 $x=2,y=3$ 或 $x=3,y=3$ 四种情况；$\xi=2$ 时，有 $x=1,y=2$ 或 $x=3,y=2$ 两种情况.

$\therefore P(\xi=0)=\dfrac{1}{9},P(\xi=1)=\dfrac{4}{9},P(\xi=2)=\dfrac{2}{9}.$

则随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$

因此，数学期望 $E\xi=0\times\dfrac{1}{9}+1\times\dfrac{4}{9}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{14}{9}$.

评析 *本题难属于中档偏上的题，大部分考生可以得分.但考虑到题意理解时要细心，稍有不慎就可能出错的情况，本题也很难得满分.*

2. 系列四的不等式证明选讲(理)

不等式证明选讲中包括绝对值不等式、二元与三元基本不等式、柯西不等式等，由于命题形式是填空题，因此难度不会太大，结合2007年的命题，我们预测2008年可能会考三元基本不等式.

例13 若 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c\leqslant A$，则 $\dfrac{A^2}{a^2}+\dfrac{A^2}{b^2}+\dfrac{A^2}{c^2}$ 的最小值为________.

解析 由 $a+b+c\leqslant A$，$abc\leqslant(\dfrac{a+b+c}{3})^3\leqslant\dfrac{A^3}{27}\Rightarrow\dfrac{1}{abc}\geqslant\dfrac{27}{A^3}$.

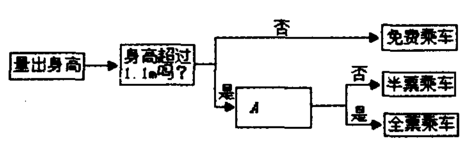
$\therefore\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\geqslant3\sqrt[3]{(\dfrac{1}{abc})^2}\geqslant\dfrac{27}{A^2}\Rightarrow\dfrac{A^2}{a^2}+\dfrac{A^2}{b^2}+\dfrac{A^2}{c^2}\geqslant27$，当 $a=b=c=\dfrac{A}{3}$ 时取得最小值27.

评析 *本题考查三元基本不等式的灵活运用，结合条件再看看结论可以想到将要用到三元不等式.注意从消除条件与结论的差异入手，是分析与求解的关键.*

3. 框图(文)

框图由流程图与结构图组成，是文科特有的教学内容，共6个学时，是2007年高考命题遗忘的角落，2008年要引起我们的关注.

例14 儿童乘坐火车时，若身高不超过1.1m，则无需购票；若身高超过1.1m，不超过1.4m，可买半票；若超过1.4m，应买全票，下图是购票的流程图.



解析 根据题意可以得到，A 处应填“身高超过1.4m吗？”

评析 *此类题要求考生熟悉流程中的每一个环节，从哪些地方开始分开，将如何分开都了如指掌，当然，难度不大，只要细心都可以产生正确结论.*

好了，解密了四个方面，真的要“泄密”了.希望它能带给你关键时刻的精彩.

责任编校　徐国坚