透视平面向量的高考热点

■中山　许少华

“如果没有运算，向量只是一个路标. 因为有了运算，向量的力量无限.”这是教材中关于向量的描述，它揭示了向量在运算中的重要性.向量是沟通代数、几何、三角的一种工具，有着极其丰富的实际背景，在数学和物理中都有广泛的应用.因此，无论是从有利于中学数学教学出发，还是从有利于高校选拔人才出发，向量是近几年的高考热点. 纵观近年高考，与向量相关的试题不落俗套，新花样层出不穷. 本文将着重阐述几类热点问题的求解，供同学们复习参考.

热点1 命制“小、巧、活”型选择题与填空题考查基本概念

例1 已知关于 x 的一元二次方程 $\vec{a}\cdot x^2+\vec{b}\cdot x+\vec{c}=\vec{0}$，其中 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 是非零平面向量，且 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，则该方程（　　）

A. 可能有无穷多个实数解

B. 至多有两个实数解

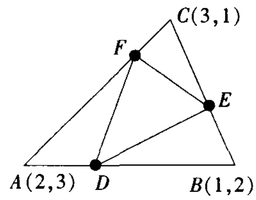
C. 至少有一个实数解

D. 至多有一个实数解

解析 由于 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，所以可设 $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$（其中 $m,n\in R$），代入方程 $\vec{a}\cdot x^2+\vec{b}\cdot x+\vec{c}=\vec{0}$，得 $\vec{a}\cdot x^2+\vec{b}\cdot x+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$，即 $(x^2+m)\vec{a}+(x+n)\vec{b}=\vec{0}$.

又因为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 不共线，得 $\begin{cases}x^2+m=0,\\ x+n=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=-m,\\ x=-n,\end{cases}$ 显然，当 $m>0$ 时，原方程无解；当 $m\leqslant 0$ 且 $n^2=-m$ 时，方程有一解. 正确答案为 D.

例2 如图，在 $\triangle ABC$ 边上作匀速运动的三点 D，E，F，在时刻 $t=0$ 时，分别从 A,B,C 出发，各以一定的速度分别向 B,C,A 前进，在时刻 $t=1$ 时到达 B,C,A，则在运动过程中 $\triangle DEF$ 的重心坐标为________.



解析 由题意，可设 $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}=\dfrac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{EC}}=\dfrac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{FA}}=\dfrac{t}{1-t}$，那么 D,E，F 三点的坐标分别为：

$(t+2(1-t),2t+3(1-t))$、$(3t+(1-t),t+2(1-t))$、$(2t+3(1-t),3t+(1-t))$，于是得 $\triangle DEF$ 的重心坐标为 $(2,2)$.

点评 近年高考在向量方面的命题特点是：“小题”灵活、“大题”基础，上述两例并非很难，但有很大的灵活性，稍有不慎，就容易出现差错.

热点2 建立在基本运算的基础上，着重考查向量的运算技能与运算能力

例3 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都是非零向量，$\vec{a}+3\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-5\vec{b}$ 垂直，$\vec{a}-4\vec{b}$ 与 $7\vec{a}-2\vec{b}$ 垂直，试求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角大小.

解析 依题意得 $\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})(7\vec{a}-5\vec{b})=0,\\ (\vec{a}-4\vec{b})(7\vec{a}-2\vec{b})=0,\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}7\vec{a}^2+16\vec{a}\cdot\vec{b}-15\vec{b}^2=0,\\ 7\vec{a}^2-30\vec{a}\cdot\vec{b}+8\vec{b}^2=0,\end{cases}\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}^2$，代入前式，得 $\vec{a}^2=\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}$，于是 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}\vec{b}^2}{|\vec{b}|^2}=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=60°$，即为所求的夹角.

点评 向量的很多运算与实数的运算相似，但又不完全一致，如下述运算：① $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$；② $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|=|\vec{a}\cdot\vec{b}|$；③ $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(\vec{a})^2\cdot(\vec{b})^2$；④ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}\Rightarrow\vec{a}=\vec{c}$；⑤若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}=0$ 或 $\vec{b}=0$；⑥ $|\vec{a}|=\pm\vec{a}$；⑦ $|\vec{a}|=|\vec{b}|\Rightarrow\vec{a}$

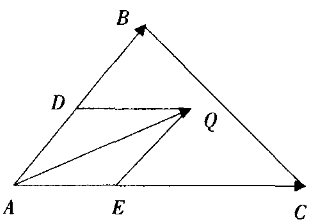
$=\pm\vec{b}$等，在一般情况下不成立.

热点3 以向量为载体，考查向量的几何运算与几何性质

例4 O为平面内一点，A,B,C是平面上不共线的三点，动点P满足$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，$\lambda\in(0,+\infty)$，则动点$P$的轨迹一定通过$\triangle ABC$的(　　)

A. 重心　　B. 垂心　　C. 外心　　D. 内心

解析 由于O点的位置不明确，由此可联想到向量的减法.$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AP}=\lambda(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|})$，由于$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$是$\overrightarrow{AB}$方向上的单位向量，$\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$是$\overrightarrow{AC}$方向上的单位向量，设$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\overrightarrow{AE}=\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$，



则$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$，即四边形$ADQE$为平行四边形；又$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AE}|$，则四边形$ADQE$为菱形，$AQ$平分$\angle BAC$. 由于$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}$，即$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{AQ}$共线，故动点$P$的轨迹一定通过$\triangle ABC$的内心. 正确选项为D.

点评 向量与几何的联系非常密切，通过向量命制与几何有关的问题很常见；掌握平行四边形的性质、菱形的性质都是求解本题的关键.

热点4 以向量为载体，考查三角运算的技能与技巧

例5 已知向量$\vec{m}=(1,1)$，向量$\vec{n}$与向量$\vec{m}$夹角为$\frac{3\pi}{4}$，且$\vec{m}\cdot\vec{n}=-1$，若向量$\vec{n}$与向量$\vec{q}=(1,0)$的夹角为$\frac{\pi}{2}$，向量$\vec{p}=(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2})$，其中$A,C$为$\triangle ABC$的内角，且$B=\frac{\pi}{3}$，求$|\vec{n}+\vec{p}|$的取值范围.

解析 设$\vec{n}=(x,y)$，得$x+y=-1$及$x^2+y^2=1$，由此得$\vec{n}=(-1,0)$或$\vec{n}=(0,-1)$，由向量$\vec{n}$与向量$\vec{q}=(1,0)$的夹角为$\frac{\pi}{2}$，知$\vec{n}=(0,-1)$；由$B=\frac{\pi}{3}$，得$A+C=\frac{2\pi}{3}$.

因此，$|\vec{n}+\vec{p}|^2=|(\cos A,2\cos^2\frac{C}{2}-1)|^2=\cos^2A+\sin^2C=1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})$.

由$0<A<\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\frac{\pi}{3}<2A+\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{3}$，得$\frac{1}{2}\leqslant1+\frac{1}{2}\cos(2A+\frac{\pi}{3})<\frac{5}{4}$.

故$|\vec{n}+\vec{p}|$的取值范围为$[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{5}}{2})$.

点评 本题“充满”了向量，但求解却仅与向量的简单运算有关.

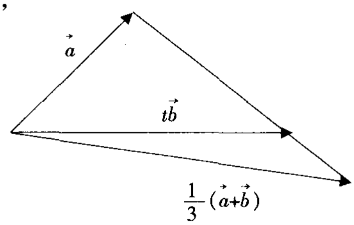
热点5 利用向量知识的特点设计探索题，重在考查考生的探索能力与创新能力

例6 若$\vec{a}$，$\vec{b}$是两个不共线且起点相同的非零向量，问是否存在实数t，使$\vec{a},t\vec{b},\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$三向量的终点在同一直线上？若存在，请求出实数$t$；若不存在，请说明理由.

解析 若存在实数t满足要求，则必存在实数λ使$\vec{a}-t\vec{b}=\lambda[\vec{a}-\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})]$，即$(\frac{2}{3}\lambda-1)\vec{a}+(t-\frac{\lambda}{3})\vec{b}=0$. 由于$\vec{a}$，$\vec{b}$不共线，

得$\begin{cases}\frac{2}{3}\lambda-1=0,\\ t-\frac{\lambda}{3}=0,\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}\lambda=\frac{2}{3},\\ t=\frac{1}{2}.\end{cases}$



故存在实数$t=\frac{1}{2}$，使$\vec{a},t\vec{b},\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b})$三向量的终点在同一直线上.

点评 解决类似此问题的一般方法是先假设结论存在，然后进行推理，出现矛盾，说明不存在，否则结论存在.

热点6 将向量与其他知识综合起来，重在考查考生的综合能力

例7 已知两点$M(-1,0),N(1,0)$，且点P使$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$成公差小于零的等差数列.

(1) 点P的轨迹是什么曲线？

(2) 若点P坐标为(x_0,y_0)，记θ为$\overrightarrow{PM}$与$\overrightarrow{PN}$的夹角，求$\tan\theta$；

解析 设P的坐标为(x,y)，由$M(-1,0),N(1,0)$，得$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{MP}=(-1-x,-y)$，$\overrightarrow{PN}=-\overrightarrow{NP}=(1-x,-y)$，$\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{NM}=(2,0)$.

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=2(1+x)$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=x^2+y^2-1$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=2(1-x)$.

于是，$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$，$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$成公差小于零的等差数列等价于：

$$\begin{cases}x^2+y^2-1=\dfrac{1}{2}[2(1+x)+2(1-x)],\\2(1-x)-2(1+x)<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2=3,\\x>0.\end{cases}$$

故点 P 的轨迹为以原点为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的右半圆.

(2) 因为点 P 的坐标为 (x_0,y_0)，得 $x_0^2+y_0^2=3$ 且 $0<x_0\leqslant\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|=\sqrt{(1+x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(1-x_0)^2+y_0^2}=\sqrt{(4-2x_0)(4+2x_0)}=2\sqrt{4-x_0^2}$.

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PM}|\cdot|\overrightarrow{PN}|}=\frac{x_0^2+y_0^2-1}{2\sqrt{4-x_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{4-x_0^2}},$$

由 $0<x_0\leqslant\sqrt{3}$，得 $\frac{1}{2}<\cos\theta\leqslant1$，此时 $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{3}$，那么 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{4-x_0^2}}$，得 $\tan\theta=\sqrt{3-x_0^2}=|y_0|$.

点评 本题将向量置身于解析几何、三角函数、不等式、函数等知识之中，是一道"在知识交汇点处命题".求解这类问题不单要掌握向量的基础知识外，还要注重所涉及知识的基本技能与技巧.

责任编校　赖庆安

（上接第 32 页）

A. I 变大，U 变大

B. I 变小，U 变小

C. I 变小，U 变大

D. I 变大，U 变小

6. 两个电源的伏安特征图线如图 10 所示，由图可知（　　）

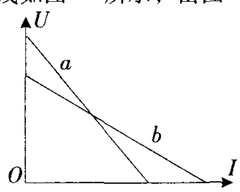


图 10

A. 电源 a 的内电阻较小，电动势较大

B. 电源 a 的内电阻较大，电动势较大

C. 电源 b 的内电阻较小，电动势较小

D. 电源 b 的内电阻较大，电动势较大

7. 将一灯泡与电吹风串联后接入电压为 U 的电路中，若电吹风两端电压是 U_1，其内部电阻丝的电阻为 r，灯泡的电阻为 R，通过灯泡的电流强度为 I，则下列说法不正确的是（　　）

A. 电源消耗的电功率是 $P=UI$

B. 电吹风消耗的电功率是 $P=U_1I$

C. 电吹风产生的热功率是 $P=U_1I$

D. 灯泡消耗的电功率是 $(U-U_1)I$

8. 磁通量的变化率是指（　　）

A. Φ　　B. $\Delta\Phi$

C. $\Delta\Phi/t$　　D. 以上都不正确

9. 下面说法正确的是（　　）

A. 线圈中的磁通量变化越大，线圈中产生的感应电动势就越大

B. 线圈中的磁通量变化越快，线圈中产生的感应电动势就越大

C. 线圈中的磁通量越大，线圈中产生的感应电动势就越大

D. 线圈放在磁场越强的地方，线圈中产生的感应电动势就越大

10. 矩形线圈在匀强磁场中绕垂直于磁场方向的轴匀速转动，下列说法中正确的是（　　）

A. 在中性面时，通过线圈的磁通量变化率最大

B. 在中性面时，感应电动势最大

C. 穿过线圈的磁通量为零时，感应电动势也为零

D. 线圈每次通过中性面电流方向均改变

11. 关于日光灯的镇流器，下列说法中正确的有（　　）

A. 镇流器产生的瞬时高压是来源于起动器两触片接通的瞬间

B. 镇流器在工作中总是产生高电压的

C. 因为镇流器对交流电有较大的阻碍作用，所以在日光灯正常工作后，镇流器起着降压限流的作用

D. 镇流器的电感对直流电也有较大的阻碍作用

12. 如图 11 所示电路中，L 是一个带铁心的线圈，R 为纯电阻，两支路的直流电阻相等，A_1，A_2 为双向电流表，在接通和断开开关 S 的瞬间，两电流表读数 I_1、I_2 分别是（　　）

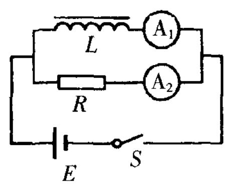


图 11

A. $I_1<I_2$，$I_1>I_2$　　B. $I_1<I_2$，$I_1=I_2$

C. $I_1<I_2$，$I_1<I_2$　　D. $I_1=I_2$，$I_1<I_2$

答案点拨

1. C　2. D（根据并联分流与阻值成反比，串联电流相等）　3. B（将其它电阻等效成一个电阻与 R_1 并联）　4. D　5. B　6. B　7. C（注意电吹风是非纯电阻用电器）　8. C　9. B　10. D（中性是线圈与磁场垂直的平面）　11. C（镇流器的高电压是在断开瞬间产生的）　12. B（接通瞬间，两表并联，L 阻碍作用大；断开瞬间，两表串联，电流一样大）

责任编校　李平安