# 例谈函数思想的应用

■许少华　杨　帆

《高中》二〇〇六年第五期

函数不仅是高中数学内容中的一个重要组成部分，而且蕴含着一种最基本的数学思想——函数思想. 面对一个数学问题，从函数的角度进行审视、分析，实际上是将一个静止的问题放到了一个动态的过程中去考查，将一个局部的问题置于全局上去解决. 显然，它是一种处理问题的策略，也是求解很多数学综合题的重要思想与方法.本文将通过实例说明它在高中数学相关重点考点中的具体应用，供同学们参考.

## 一、三角中的函数思想

在对三角等式证明与三角函数式的最值求解时，一些问题若通过三角变换去完成解题过程相当冗长，繁杂的运算也是一种隐性失分；若换个角度，巧妙地利用函数思想，问题的解答就变得十分快捷，收到事半功倍之效.

**例 1** 若 $\alpha$、$\beta$ 为锐角，且 $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=2$，求证：$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

**分析** 已知条件的左边是关于 $\alpha$、$\beta$ 的双变量的关系式，若固定其中一个，则可将其转化成相关函数：若固定 $\alpha$ 可得 $\frac{\cos\alpha}{\sin x}+\frac{\cos x}{\sin\alpha}$，若固定 $\beta$ 可得 $\frac{\cos x}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin x}$.显然，它们都是关于 $x$ 的减函数.

**证明** 设 $f(x)=\frac{\cos x}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin x}, x\in(0,\frac{\pi}{2})$，显然 $f(x)$ 为单调减函数.

由于 $f(\alpha)=2$，$f(\frac{\pi}{2}-\beta)=\frac{\cos(\frac{\pi}{2}-\beta)}{\sin\beta}+\frac{\cos\beta}{\sin(\frac{\pi}{2}-\beta)}=2$，即 $f(\alpha)=f(\frac{\pi}{2}-\beta)$；由单调性可知 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

**点评** 本题借助函数的单调性，求解变得简单快捷；假若你是通过三角变换求解的话，再将其与这解法比较，也许你会体会到函数的威力.

## 二、数列中的函数思想

数列本身就是特殊的函数，两类特殊数列与函数有更密切关系：等差数列的通项 $a_n$ 是 $n$ 的一次函数，前 $n$ 项和是 $n$ 的二次函数；等比数列的通项 $a_n$ 可以认为是 $n$ 的指数函数.

**例 2** 设 $n$ 为正整数，$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$，$b_n=a_{2n+1}-a_{n+1}$，若数列 $\{b_n\}$ 中从第 2 项起以后所有项都大于 $2k-5$，求 $k$ 的范围.

**分析** "若数列 $\{b_n\}$ 中从第 2 项起以后所有项都大于 $2k-5$"，假若能得到该数列的最小项，只需让最小项大于 $2k-5$ 即可.由此，我们可以通过构造函数来完成.

**解** 设 $f(n)=b_n=a_{2n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}$，则 $f(n+1)-f(n)=b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}-\frac{2}{2n+4}=(\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+4})+(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+4})>0$.显然，$f(n)$ 在 $\mathbf{N}^*$ 上是增函数，即数列 $\{b_n\}$ 从第 2 项起是递增数列.因此，从第 2 项起，数列 $\{b_n\}$ 中的最小项为 $b_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$，由 $\frac{9}{20}>2k-5$，得 $k<\frac{109}{40}$ 即为所求范围.

**点评** 本题在求解过程很巧妙地利用了函数的单调性来产生函数的最值，并通过求函数的最值使问题获解.

**例 3** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 $S_n$，若 $a_3=12$，$S_{12}>0, S_{13}<0$，请指出 $S_1$，$S_2$，$\cdots$，$S_{12}$ 中哪个最大，并说明理由.

**分析** 本题的实质是当 $n$ $(1\leqslant n\leqslant 12)$ 为何值时，$S_n$ 最大.由于等差数列中 $S_n$ 是 $n$ 的二次函数，于是本题可借助于闭区间上二次函数的最值进行求解.

**解** 设等差数列的首项为 $a_1$，公差为 $d$.依题意可得 $\begin{cases}a_1+2d=12,\\ 12a_1+\frac{12\times11}{2}d>0,\\ 13a_1+\frac{13\times12}{2}d<0.\end{cases}\Rightarrow -\frac{24}{7}<d<-3$.

由 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n(12-2d)+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}[n-\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2-\frac{d}{2}[\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2$，可知当 $[n-\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2$ 最小时，$S_n$ 最大，且 $-\frac{24}{7}<d<-3$，可得 $6<\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})<6.5$. 故当 $n=6$ 时，$S_n$ 最大，即 $S_1$，$S_2$，$\cdots$，$S_{12}$ 中 $S_6$ 最大.

**点评** 可以看出从函数的角度观察、分析数列问题，开辟了数列问题求解的新天地，给了我们一个全

新的视角.

**三、不等式中的函数思想**

函数、方程、不等式往往相互交织在一起，函数图象对产生方程的解与不等式的解集都有很大帮助，而函数的单调性又与转化不等式、证明不等式有密切的联系.

**例 4** 若 $a$、$b$、$c\in\mathbf{R}$ 且 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，则（　　）.

(A) $a>0$，$b<0$，$c<0$　(B) $a<0$，$b<0$，$c>0$

(C) $a<0$，$b>0$，$c<0$　(D) $a>0$，$b>0$，$c>0$

**解析** 已知条件中的三个不等式很特别，怎样才能较好地应用呢？经过联想，发现它们的左边正好分别是$(x+a)(x+b)(x+c)$展开后的二次项与一次项的系数及常数项.

构造函数$f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$. 易知：当$x>0$时，$f(x)>0$，即图象与$x$轴的正半轴无交点，则三个交点：$(-a,0)$、$(-b,0)$、$(-c,0)$均在负半轴上，故答案选 (D).

**点评** 要善于发现已知条件隐含的某种关系，并利用其构造函数来解答问题.

**例 5** 求证：$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n\cdot(n+1)}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

**分析** 将欲证的不等式转化为$2\sqrt{1\cdot 2}+2\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+2\sqrt{n\cdot(n+1)}<(n+1)^2$，从左边的两数积想到可能是完全平方式展开后的中间项.

**证明** 构造$f(x)=(x+\sqrt{2})^2+(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2+\cdots+(\sqrt{n}x+\sqrt{n+1})^2>0$，将$f(x)$整理成关于$x$的二次函数，得$f(x)=(1+2+\cdots+n)x^2+2(\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)})x+(2+\cdots+n+1)>0$恒成立. $\because 1+2+\cdots n>0$，$\therefore\Delta=4[\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}]^2-4(1+2+\cdots+n)^2<0$，则有$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\dfrac{(n+1)n}{2}<\dfrac{(n+1)^2}{2}$.

**点评** 本题也可以通过放缩法证明，但这里构造了二次函数，利用二次函数的相关性质产生结论，可以看出这种解法更具有启发性.

**四、方程中的函数思想**

面对一个方程问题，我们可以通过构造函数，利用函数的性质及图象，得知方程根的分布，再通过根的分布产生问题结论.

**例 6** 已知$x$关于的一元二次方程$x^2+ax+b=0$有两个实根$\alpha$、$\beta$.证明：

(1) 若$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，则$2|a|<4+b$且$|b|<4$；

(2) 若$2|a|<4+b$且$|b|<4$，则$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$.

**分析** 本题是由方程产生的不等式问题.一般的，由一个函数图象，我们可以得出方程的根或不等式的解集. 方程、不等式与函数是紧密相联的.因此，本题可以通过研究相关函数的方法来求解.

**证明** (1)由韦达定理，得$|b|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|<4$，又由$f(x)=x^2+ax+b$的图象开口向上，且与$x$的两个交点满足$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$，则必有$f(\pm 2)>0$，即$4+2a+b>0$且$4-2a+b>0$，也就是$2|a|<4+b$.

(2) 由$2|a|<4+b$，得$4+2a+b>0$且$4-2a+b>0$，即$\begin{cases}f(-2)>0,\\ f(2)>0.\end{cases}$于是两根落在区间$(-2,2)$之内或区间之外.

若两根均落在区间$(-2,2)$之外，则$|b|=|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|>4$与$|b|<4$矛盾.

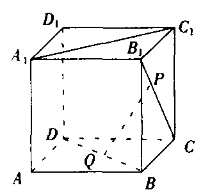
故两根均落在区间$(-2,2)$之内，因此，$|\alpha|<2$，$|\beta|<2$.

**点评** 本题通过构造二次函数，充分利用二次函数的图象性质使问题迅速获解.

**五、立体几何中的函数思想**

在立体几何中，很多问题的求解或转化都要利用函数，只有增强了这方面的意识，对问题的求解才能得心应手.

**例 7** 正方体的$ABCD-A_1B_1C_1D_1$棱长为 1，求异面直线$BD$与$B_1C$的距离.




**分析** 异面直线间的距离，实际上是分别在异面直线的两条直线上各取一点，并通过相关函数求此两点间距离的最小值.

**解** 设$P$在$B_1C$上，$Q$在$BD$上，且$PB_1=x$，$BQ=y$，则$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BQ}$，又$\langle\overrightarrow{PB_1},\overrightarrow{B_1B}\rangle=135°$，$\langle\overrightarrow{B_1B},\overrightarrow{BQ}\rangle=90°$，$\langle\overrightarrow{PB_1},\overrightarrow{BQ}\rangle=120°$. 由此可知$\overrightarrow{PQ}^2=\overrightarrow{PB_1}^2+\overrightarrow{B_1B}^2+\overrightarrow{BQ}^2+2\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{B_1B}+2\overrightarrow{PB_1}\cdot\overrightarrow{BQ}+2\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{BQ}=x^2+1+y^2-2x\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-2xy\cdot\dfrac{1}{2}=(y-\dfrac{1}{2}x)^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2+\dfrac{1}{3}$.

显然，当$y=\dfrac{1}{2}x$且$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，即当$x=2y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$时，$\overrightarrow{PQ}^2$有最小值$\dfrac{1}{3}$，得$|\overrightarrow{PQ}|$有最小值$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，即$BD$与$B_1C$的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**点评** 异面直线的距离有多种求解方法，本题利

用向量，并借助函数求最值产生问题结论.

**六、解析几何中的函数思想**

解析几何是高中数学的重点，也是历年高考的热点；求解解析几何问题的思想方法十分丰富，函数思想就是其中之一.

**例 8** 从圆 $x^2+y^2=4$ 上任意一点 $P$ 作 $x$ 轴的垂线，垂足为 $Q$，点 $M$ 在线段 $PQ$ 上，且 $\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QP}$ $(0<\lambda<1)$.

(1) 求点 $M$ 的轨迹方程；

(2) 若(1) 的曲线上任意一点到 $A(0,-2)$ 的最远距离为 3，求 $\lambda$ 的值.

**分析** 第一个问题求轨迹方程难度不大，第二个问题比较难.为此，设出任意一点的坐标为 $(x,y)$，再求到 $A(0,-2)$ 的距离，并考虑到 $(x,y)$ 满足轨迹方程，可以得到相关函数式.

**解** (1)点 $M$ 的轨迹方程 $x^2+\frac{y^2}{\lambda^2}=4$(详细解答过程被省略).

(2) 设曲线上任意一点为 $B(x,y)$，则 $|BA|=\sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{4-\frac{y^2}{\lambda^2}+(y-2)^2}=\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\cdot y^2+4y+8}$ $(-2\lambda\leqslant y\leqslant 2\lambda)$.

①当 $\lambda\in(0,\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$ 时，$\frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}\leqslant 2\lambda$.因此，当 $y=\frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}$ 时，$|BA|_{max}=\sqrt{\frac{32(1-\frac{1}{\lambda^2})-16}{4(1-\frac{1}{\lambda^2})}}=3$，得 $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

②当 $\lambda\in(\frac{\sqrt{5}-1}{2},1)$ 时，$\frac{2\lambda^2}{1-\lambda^2}>2\lambda$.因此，当 $y=2\lambda$ 时，$|BA|_{max}=\sqrt{\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\cdot(2\lambda)^2+8\lambda+8}=3$，得 $\lambda=\frac{1}{2}$ (舍去).

由①、②可知 $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

**点评** 本题是解析几何的最值问题，通过转化，变成了闭区间上的二次函数的最值问题.

**七、探索性与实际应用问题中的函数思想**

探索性与实际应用问题的背景新颖且具有公平性，它可以较好地考查考生分析问题与解决问题的能力，考查考生数学知识的应用能力，近年来成为高考的热点.由于探索题结论往往不明确，很多考生一时不知所措.实际上，解决这两类问题的一个重要突破口就是构造函数.

**例 9** 函数 $y=a^x$ 与 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$ 唯一交点的横坐标为 $x_0$，是否存在实数 $t$，且当 $0<x<x_0$ 时，使不等式 $5ta^x+(4-3t)\log_a x>0$ 恒成立?若存在，求 $t$ 的值或所在范围；若不存在，说明理由.

**分析** 此题涉及基础知识较多，我们很容易想到分离变量，再利用函数进行相关转化.

**解** 结合图象易知 $0<x_0<1$，当 $0<x<x_0$ 时，$\frac{a^x}{\log_a x}\in(0,1)$，那么不等式 $5ta^x+(4-3t)\log_a x>0$ 可转化为 $5t\cdot\frac{a^x}{\log_a x}+(4-3t)>0$.令 $k=\frac{a^x}{\log_a x}$，则 $f(k)=5tk+(4-3t)>0$，当 $k\in(0,1)$ 时恒成立，则 $\begin{cases}f(0)>0,\\f(1)>0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5t\cdot 0+(4-3t)>0,\\5t\cdot 1+(4-3t)>0.\end{cases}\Rightarrow -2<t<\frac{4}{3}$.因此，实数 $t$ 存在，且 $t\in(-2,\frac{4}{3})$.

**点评** 本题通过构造函数，结合一次函数的图象特征，使问题的解答很便捷.

**例 10** 某市用水收费的方法是：水费=基本费+超额费+损耗费.若每月用水量不超过最高限量 $a\,m^3$ 时，只付基本费 8 元和每户每月的定额损耗 $c$ 元；若用水量超过 $a\,m^3$ 时，除了付同上的基本费和损耗费外，超过部分每立方米付 $b$ 元的超额费，已知每户每月的定额损耗不超过 5 元.

| 月份 | 用水量（立方米） | 水费（元） |
|---|---|---|
| 1 | 9 | 9 |
| 2 | 15 | 19 |
| 3 | 22 | 33 |

该市一家庭今年第一季度的用水量和支付的费用如右表所示，根据上表中的数据求 $a$、$b$、$c$ 的值.

**分析** "超过与不超过最高限量的付费方式不同"是本题的关键，如何体现"超过最高限量"与"不超过最高限量"呢?这里我们可以通过分段函数来解决.

**解** 设用水量为 $x\,m^3$，支付费用为 $y$ 元，则 $y=\begin{cases}8+c\ (0\leqslant x\leqslant a),\\8+b(x-a)+c\ (x>a).\end{cases}$ 由 $0<c\leqslant 5$，得 $8<8+c\leqslant 13$.因此，第二、三月的用水量都超过最高限量，由 $\begin{cases}8+b(15-a)+c=19,\\8+b(22-a)+c=33.\end{cases}$ 得 $b=2$ 且 $2a=c+19$.

若 $a<9$，由 $8+2(9-a)+c=9$，得 $2a=c+17$ 与 $2a=c+19$ 矛盾；因此 $a\geqslant 9$，且由 $8+c=9$，得 $c=1$，$a=10$.

故 $a=10$，$b=2$，$c=1$.

**点评** 本题借助分段函数，使得求解过程变得简洁明了.

**通过以上各例可以看出函数思想是非常重要的数学思想方法.因此，同学们掌握好了这种解题的"通法"，就可做到以不变应万变，顺利解决各种相关的数学问题.**

(作者单位：中山市第一中学高中部)

**责任编校** 赖庆安