《高中》二〇〇六年第三期

# 解析几何专题复习

解析几何是中学数学的重点、难点,也是经久不衰的高考热点.仔细研究历年高考试题发现,无论是“小题”,还是“大题”都少不了解析几何,且年年出新题、年年有新招.因此,要想取得高考好成绩,就要在解析几何上多下功夫.本文针对解析几何的复习应注重的部分进行深入剖析,期望能对同学们有所帮助.

**1. 点差法**

【例 1】求椭圆 $x^2+2y^2=8$ 过点 $P(2,1)$ 且被点 $P$ 平分的弦所在的直线方程.

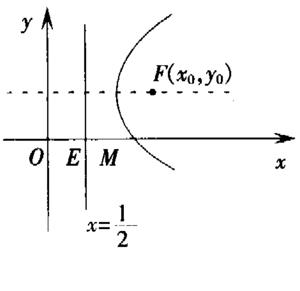
**解**:设弦的两端点分别为 $(x_1,\ y_1)$ 与 $(x_2,y_2)$,则有 $\begin{cases}x_1^2+2y_1^2=8,\\x_2^2+2y_2^2=8.\end{cases}\Rightarrow(x_2-x_1)(x_2+x_1)+2(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0$,经整理得 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$.故所求直线方程为 $x+y=3$ .

**评析**:在解析几何中,我们经常遇到与中点有关的问题,而这些问题无一例外地可用点差法来求解.这种方法规律性强,适用范围广,因而要引起同学们的高度重视.

**2. 定义法**

【例 2】已知双曲线以直线 $x=\frac{1}{2}$ 为右准线,离心率为 2,且经过定点 $M(1,0)$,求实半轴最大时的双曲线方程.

**解**:如图,设右焦点为 $F(x_0,y_0)$,由第二定义得 $\frac{|MF|}{|ME|}=2$,即 $|MF|=1$.



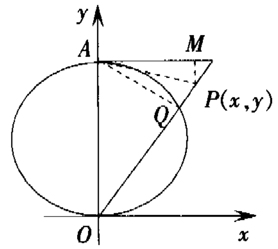

$\therefore(x_0-1)^2+y_0^2=1$,由此得 $\frac{1}{2}<x_0\leqslant2$.又 $c-\frac{a^2}{c}=x_0-\frac{1}{2}\Rightarrow x_0=\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}$,从而 $0<a\leqslant1$.当 $a=1$ 时,$x_0=2,y_0=0$,此时方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

**评析**:用第二定义产生右焦点的轨迹方程是重点,抓住变量的有界性及基本量间的关系产生 $a$ 的范围是难点.抓住重点,突破难点是求解本题的关键.

**3. 平面几何法**

【例 3】过原点的直线交圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 于 $Q$,在直线 $OQ$ 上取一点 $P$,使 $P$ 到直线 $y=2$ 的距离 $|PM|$ 等于 $|PQ|$,当直线绕原点旋转时,求点 $P$ 的轨迹.

**解**:如图,设 $P(x,y)$,连 $AQ$、$AP$,因为 $\angle AQP=90^\circ$,所以 $\triangle AQP\cong\triangle AMP$,$|AQ|=|AM|=|x|$,又 $|OA|=2$.




由 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|AM|=\frac{1}{2}|OP|\cdot|AQ|$,

即 $2|x|=|x|\cdot\sqrt{x^2+y^2}$,得 $x=0$ 或 $x^2+y^2=4$.

故点 $P$ 的轨迹为 $y$ 轴或以原点为圆心、以 2 为半径的圆.

**评析**:研究解析几何问题,有两种思路:一是通过方程(代数);二是通过图形(几何),在利用图形时,不可忽视平面几何的作用.

**4. 不等式法**

【例 4】定长为 3 的线段 $AB$ 的两端点在 $y^2=x$ 上移动,$AB$ 的中点为 $M$,求点 $M$ 到 $y$ 轴的最短距离.

**解**:设 $A(x_1^2,x_1)$、$B(x_2^2,x_2)$、$M(x,y)$,则有

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2=2x,\\x_1+x_2=2y,\\(x_1^2-x_2^2)^2+(x_1-x_2)^2=9.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=2x,\\2x_1x_2=4y^2-2x,\\(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)+1]^2=9.\end{cases}$$

由于 $(x_1-x_2)^2+[(x_1+x_2)^2+1]\geqslant2\sqrt{(x_1-x_2)^2[(x_1+x_2)^2+1]}=6$,即 $4x+1\geqslant6$,得 $x\geqslant\frac{5}{4}$,其中等号成立的条件为 $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2+1$,即 $4x_1x_2=-1$,也就是 $4y^2-2x=-\frac{1}{2}$,结合 $x=\frac{5}{4}$,得 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故最短距离为 $\frac{5}{4}$,此时,点 $M$ 的坐标为 $(\frac{5}{4},\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(\frac{5}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

**评析**:不等式具有工具性,在解析几何中适时地应用不等式,会给求解带来方便,也使解题过程得到优化.

**5. 函数思想**

二次曲线中的最值问题,实际上可以转化为函数的最值问题,结合函数的有关性质进行求解.

【例 5】由椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$ 的顶点 $B(0,-b)$ 引一条弦 $BP$,求 $BP$ 的最大长度.

**解**:设 $P(x,y)$,因为 $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\ (-b\leqslant y\leqslant b)$,则

$|BP|=\sqrt{x^2+(y+b)^2}=\frac{1}{b}\sqrt{(b^2-a^2)y^2+2b^3y+b^2(a^2+b^2)}$.

(i) 当 $2b^2\leqslant a^2$ 时，$y=-\frac{b^3}{b^2-a^2}$，得 $|BP|_{\min}=\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$；

(ii)当 $2b>a$ 时，$y=b$，得 $|BP|_{\min}=2b$.

**6. 基本量思想**

解析几何中的焦准距、离心率、焦半径等都是基本量，很多看似复杂的问题，其实就是这些量之间的关系.

**【例 6】**一系列椭圆的左顶点在抛物线 $y^2=x-1$ 上，它们的长轴都是 4，且都以 $y$ 轴为左准线.求离心率达到最大时的椭圆方程.

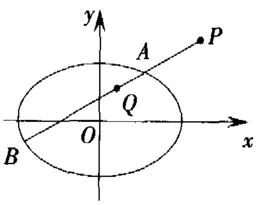
**解**：设椭圆中心为 $(x_0,y_0)$，则方程为 $\frac{(x-x_0)^2}{4}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.又左准线方程 $x=x_0-\frac{4}{\sqrt{4-b^2}}=0\Rightarrow x_0=\frac{4}{\sqrt{4-b^2}}$. 由于 $y_0^2=x_0-3=\frac{4}{\sqrt{4-b^2}}-3\geqslant0\Rightarrow\sqrt{4-b^2}\leqslant\frac{4}{3}$；又由于 $e=\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}\leqslant\frac{2}{3}$，当取等号时，有 $b^2=\frac{20}{9}$，$x_0=3$，$y_0=0$.

故椭圆方程为 $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{9y^2}{20}=1$.

**7. 整体思想**

整体思想是一种运算策略，它可以有效地绕过很多中间环节，使运算直指结论.

**【例 7】**如图，椭圆 $x^2+2y^2=8$ 和点 $P(4,1)$，过点 $P$ 的直线与椭圆交于 $A$、$B$ 两点，点 $Q$ 在线段 $AB$ 上，且使 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{|QA|}{|QB|}$，求点 $Q$ 的轨迹方程.




**解**：设 $\frac{AP}{PB}=-\frac{QA}{QB}=\lambda$，$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，则 $x_1^2+2y_1^2=8$ 且 $x_2^2+2y_2^2=8$.

另设 $Q(x,y)$，且已知 $P(4,1)$，有

$$\begin{cases}4=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\cdots\cdots(1),\\1=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\cdots\cdots(2).\end{cases}\text{及}\begin{cases}x=\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}\cdots\cdots(3),\\y=\frac{y_1-\lambda y_2}{1-\lambda}\cdots\cdots(4).\end{cases}$$

由(1)×(3)+2×(2)×(4)得 $4x+2y=\frac{(x_1^2+2y_1^2)-\lambda^2(x_2^2+2y_2^2)}{1-\lambda^2}=8$.

故点 $Q$ 的轨迹方程为 $2x+y=4$ (在椭圆内部).

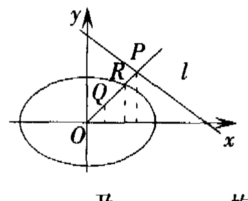
**8. 主元思想**

解析几何问题的共性是：条件较多，有时也较为复杂；主元思想就是抓主要矛盾，在纷乱的条件"堆"中，抓住一两个起关键作用的条件进行分析、联想，最终促使问题得以解决.

**【例 8】**已知椭圆 $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$，直线 $l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$，$P$ 是 $l$ 上一点，射线 $OP$ 交椭圆于点 $R$，又点 $Q$ 在 $OP$ 上，且满足 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，当 $P$ 点在 $l$ 上移动时，求点 $Q$ 的轨迹方程.

**解**：已知 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$，并设 $Q(x_1,y_1)$、$R(x_2,y_2)$、$P(x_3,y_3)$，结合相似形，易知有：

$\frac{|OQ|}{|x_1|}=\frac{|OR|}{|x_2|}=\frac{|OP|}{|x_3|}$ 及 $\frac{|OQ|}{|y_1|}=\frac{|OR|}{|y_2|}=\frac{|OP|}{|y_3|}$；又 $x_1$、$x_2$、$x_3$ 正负同号，$y_1$、$y_2$、$y_3$ 正负同号，并结合 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$ 可知，$x_1$、$x_2$、$x_3$ 及 $y_1$、$y_2$、$y_3$ 均成等比数列且有相同的公比.



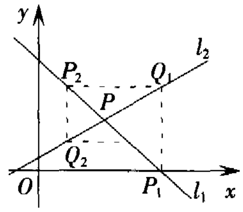

设 $Q(x,y)$、$R(rx,ry)$、$P(r^2x,r^2y)$，由 $\begin{cases}\frac{x^2r^2}{24}+\frac{y^2r^2}{16}=1,\\\frac{r^2x}{12}+\frac{r^2y}{8}=1.\end{cases}$

消去 $r^2$，得 $2x^2+3y^2-4x-6y=0$ ($x$、$y$ 不同时为零)，即为所求点 $Q$ 的轨迹方程.

## 相关的交汇问题

**1. 与数列交汇**

**【例 9】**如图，直线 $l_1:y=kx+1-k\,(k\neq0,k\neq\pm\frac{1}{2})$ 与直线 $l_2:y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 相交于点 $P$，直线 $l_1$ 与 $x$ 轴交于点 $P_1$，过点 $P_1$ 作 $x$ 轴的垂线交直线 $l_2$ 与点 $Q_1$，过点 $Q_1$ 作 $y$ 轴的垂线交直线 $l_1$ 于点 $P_2$，过点 $P_2$ 作 $x$ 轴的垂线交直线 $l_2$ 于点 $Q_2$，…，这样一直作下去，可得到一系列点 $P_1$、$Q_1$、$P_2$、$Q_2$，…，$P_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$，求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

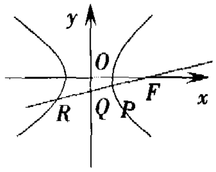



**解**：设 $P_n(x_n,y_n)$，则 $Q_n(x_n,\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$、$P_{n+1}(x_{n+1},\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2})$.由 $P_{n+1}$ 在直线 $l_1$ 上，得 $\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k\Rightarrow x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$.显然，数列 $\{x_n-1\}$ 是以 $x_1-1$ 为首项，以 $\frac{1}{2k}$ 为公比的等比数列. 又由已知得 $x_1=1-\frac{1}{k}$，那么 $x_n-1=(\frac{1}{2k})^{n-1}(x_1-1)$.

故数列$\{x_n\}$的通项公式为 $x_n=1-2\cdot(\frac{1}{2k})^n$.

**2. 与不等式交汇**

【例 10】如图,设离心率为 $e$ 的双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的右焦点为点 $F$,斜率为 $k$ 的直线过点 $F$,且与双曲线的左、右支以及 $y$ 轴的交点依次为 $R$、$P$、$Q$,试比较 $e^2$ 与 $1+k^2$ 的大小.




**解**:过右焦点且斜率为 $k$ 的直线为 $y=k(x-c)$,并将其代入双曲线方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$得 $(b^2-a^2k^2)x^2+2ca^2k^2x-(a^2c^2k^2+a^2b^2)=0$.

已知直线与双曲线有两个交点 $P$、$R$,由 $x_1x_2=-\frac{a^2c^2k^2+a^2b^2}{b^2-a^2k^2}>0$,得 $(\frac{c}{a})^2-1-k^2>0$,即 $e^2>1+k^2$.

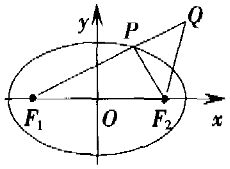
**3. 与向量交汇**

【例 11】已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别是 $F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$,$Q$ 是椭圆外的动点,满足$|\overrightarrow{F_1Q}|=2a$,点 $P$ 是线段 $F_1Q$ 与该椭圆的交点,点 $T$ 在线段 $F_2Q$ 上,并且满足$\overrightarrow{PT}\cdot\overrightarrow{TF_2}=0$,$|\overrightarrow{TF_2}|\neq0$.

(Ⅰ)设 $x$ 为点 $P$ 的横坐标,证明$|\overrightarrow{F_1P}|=a+\frac{c}{a}x$;

(Ⅱ)求点 $T$ 的轨迹 $C$ 的方程;

(Ⅲ)试问:在点 $T$ 的轨迹 $C$ 上,是否存在点 $M$ 使$\triangle F_1MF_2$的面积 $S=b^2$?若存在,求$\angle F_1MF_2$的正切值;若不存在,请说明理由.




**解**:(Ⅰ)略.

(Ⅱ)设点 $T$ 的坐标为$(x,y)$,当$|\overrightarrow{PT}|=0$时,点$(a,0)$和点$(-a,0)$在轨迹上;当$|\overrightarrow{PT}|\neq0$且$|\overrightarrow{TF_2}|\neq0$时,由$|\overrightarrow{PT}|\cdot|\overrightarrow{TF_2}|=0$,得$\overrightarrow{PT}\perp\overrightarrow{TF_2}$,又$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PF_2}|$,所以 $T$ 为线段 $F_2Q$ 的中点,在$\triangle QF_1F_2$中,$|\overrightarrow{OT}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{F_1Q}|=a$,所以有 $x^2+y^2=a^2$.

(Ⅲ)$C$ 上存在点 $M(x_0,y_0)$使 $S=b^2$ 的充要条件是
$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=a^2\cdots\cdots(1),\\ \frac{1}{2}\cdot2c|y_0|=b^2\cdots\cdots(2).\end{cases}$$
由(2)得$|y_0|=\frac{b^2}{c}$,并代入(1)得 $x_0^2=a^2-\frac{b^4}{c^2}=(a-\frac{b^2}{c})(a+\frac{b^2}{c})\geqslant0$.于是,当$a\geqslant\frac{b^2}{c}$时,存在点 $M$ 使 $S=b^2$;当$a<\frac{b^2}{c}$时,不存在满足条件的点 $M$.

当$a\geqslant\frac{b^2}{c}$时,$\overrightarrow{MF_1}=(-c-x_0,-y_0)$,$\overrightarrow{MF_2}=(c-x_0,-y_0)$,由$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=x_0^2-c^2+y_0^2=a^2-c^2=b^2$,$\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\cos\angle F_1MF_2$.又$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{MF_1}|\cdot|\overrightarrow{MF_2}|\sin\angle F_1MF_2=b^2$,得$\tan\angle F_1MF_2=2$.

*综上,解析几何的内容很多,限于篇幅,本文未能将全部重点及热点详细地解析.希望同学们能以上述所列的相关重点为中心做进一步的拓展,力争取得最好的成效.*

〔本专题由中山市第一中学高中部许少华(执笔)、李德明、陈国祥、艾龙彪、胡洪及中山市实验高中李云鼎等老师供稿〕

**责任编校　赖庆安**

## 举办"高中之文·双语作文竞赛"活动启事

本刊从即日起以高中生为对象举办"高中之文·双语作文竞赛"活动,具体要求如下:

来稿要求:参加征文活动的同学,请以"别样风景"或"人,是需要可持续发展的"为话题进行双语作文。作文立意自定,文体不限,题目自拟,1000字以内。参赛作文来稿须是同一话题的中、英文两种版本。参赛的同学须提供准确、详细的联系方式。

本次征文将视来稿情况设特等奖、一、二、三等奖和优胜奖若干名。特等奖奖金2000元/篇,一等奖1500元/篇,二等奖1000元/篇,三等奖和优秀奖将赠送其他珍贵礼品。部分优秀作文将在本刊相关栏目刊登,获奖同学均有机会应邀参加本刊举办的相关活动。

投稿方式:可发邮件至E-mail:gzsyzw@126.com,或将来稿直接邮寄:广州市小北路155号广东教育杂志社《高中》编辑部 蒋小青老师收,并在信封右上角标明"双语作文"字样。邮政编码:510045。

来稿截止时间:2006年10月31日(以邮戳为准)。

《高中》编辑部

2006年1月1日

《高中》二〇〇六年第三期