数为 C_{m-1}^{n-1}.

证明 由题意,满足条件的 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 的不同取值情况种数就是所求的映射个数,不妨设 $y_1<y_2<\cdots<y_n$,由于 $f(x_1)\leqslant f(x_2)\leqslant\cdots\leqslant f(x_{m-1})\leqslant f(x_m)$ 中共有 $m-1$ 个“$\leqslant$”号,且 B 中的每一个元素都有原象,所以这 $m-1$ 个“$\leqslant$”号中只能有 $n-1$ 个“$\leqslant$”号取“$<$”号,其余 $m-n$ 个“$\leqslant$”号都取“$=$”号,而且这 $n-1$ 个“$<$”号将 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 从左至右隔成非空的 n 组(编号为 $1,2,3,\cdots,n$,同一组的数相等),定义第 i 组的数取值 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$,则满足条件的 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 的不同取值情况种数等于从 $m-1$ 个“$\leqslant$”号中任选 $n-1$ 个“$\leqslant$”号改为“$<$”号(其余 $m-n$ 个“$\leqslant$”号都改为“$=$”号)的方法数,即 C_{m-1}^{n-1} 个,故这样的映射共有 C_{m-1}^{n-1} 个.

例2(例1变题) 已知两个实数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{50}\}$,若映射 $f:A\to B$ 使得 B 中的每一个元素都有原象,而且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{99})\leqslant f(x_{100})$,这样的映射共有多少个?

解 根据结论7,这样的映射共有 C_{99}^{49} 个.

探究8 能否将结论7推广?

结论8 已知两个实数集合 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$ 与 $B=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$,$m\geqslant n$,若映射 $f:A\to B$ 使得 B 中的每一个元素都有原象,而且 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 之间用 k 个“$\leqslant$”号,$m-k-1$ 个“$<$”号连接,$m-n\leqslant k\leqslant m-1$,则无论“$\leqslant$”号与“$<$”的位置如何,这样的映射个数均为 C_k^{m-n}.

证明 满足条件的 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 的不同取值情况种数就是所求的映射个数.由于 B 中的每一个元素都有原象,所以 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 之间用 $n-1$ 个“$<$”号,$m-n$ 个“$=$”号连接,已知 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 之间有 k 个“$\leqslant$”号,$m-k-1$ 个“$<$”号,所以这 k 个“$\leqslant$”号中有 $(n-1)-(m-k-1)=n-m+k$ 个取“$<$”号,其余 $k-(n-m+k)=m-n$ 个“$\leqslant$”号都取“$=$”号,类似于结论7的证明,$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_m)$ 的不同取值情况种数等于从 k 个“$\leqslant$”号中任选 $n-m+k$ 个“$\leqslant$”号改为“$<$”号(其余 $m-n$ 个“$\leqslant$”号都改为“$=$”号)的方法数,即 C_k^{n-m+k},也即 C_k^{m-n},所以这样的映射共有 C_k^{m-n} 个.

例3 已知两个实数集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{10}\}$ 与 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_8\}$,若映射 $f:A\to B$ 使得 B 中的每一个元素都有原象,而且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_6)<f(a_7)<\cdots<f(x_{10})$,这样的映射共有多少个?

解 $m=10,n=8,k=5$,由结论8得,这样的映射共有 $C_5^{10-8}=10$ 个.

点击解析几何应用题

广东中山实验高级中学 528403 李云鼎
广东中山一中高中部 528403 许少华

圆锥曲线是中学数学的重点、难点也是高考的热点,由于它具有丰富的内涵,因而与现实生活联系密切;很多优秀的应用题就是与解几结合产生的;本文从知识结构出发例谈解几应用题的求解,供读者参考.

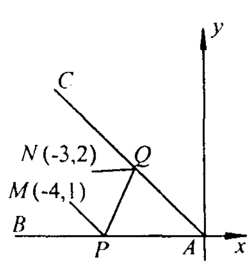

图 1

1 与直线有关的应用题

例1 如图1,两直线段形江岸 AB 与 AC 交汇于 A,$\angle BAC$ 内的 M 处为水文站,N 地为电讯局.现欲在两江岸 AB、AC 上各建一水文碑 P,Q,建成后水文站每天都要派人从 M 出发到 P 碑测量水情,再到 Q 碑测量水情,然后直接到 N 发电报给新闻单位报告水情.测得 $\angle BAC=45°$,当直角坐标系以点 A 为原点且以直线 BA 为 x 轴时,测得 $M(-4,1)$,$N(-3,2)$,问:两碑 P,Q 建在何处时才使路程 $MPQN$ 最短?

分析 作点 M 关于 AB 的对称点 M_1;再作点 N 关于 AC 的对称点 N_1,连结 M_1N_1,

则 M_1N_1 分别交 AB,AC 于 P,Q 两点,这两点即为水文碑的建址地.

直线 M_1N_1 的方程为 $y=2x+7$,易求得 $P(-\frac{7}{2},0)$,$Q(-\frac{7}{3},-\frac{7}{3})$.

2　与圆有关的应用题

例2　据气象台预报:在 A 城正东方300km的 B 处有一台风中心,正以每小时40km的速度向西北方向移动,在距台风中心250km以内的地区将受其影响,问台风是否会影响 A 城?若影响,持续时间多长?

分析　以点 A 为圆心、以250km为半径作圆,当台风中心移动经过的直线 l 与圆相切或相交时,A 城将受影响;以 A 为原点、正东方向为 x 轴正方向建立直角坐标系,则圆的方程为 $x^2+y^2=250^2$,直线 l 的方程为 $y=-x+300$.

由 $\begin{cases}y=-x+300\\x^2+y^2=250^2\end{cases}$,得 $x^2-300x+550\times25=0$.

由于 $\Delta=300^2-4\times550\times25=100(900-550)>0$,因此,$A$ 城将受影响.

由圆心到直线的距离为 $150\sqrt{2}$、圆半径为250,得弦长为 $2\sqrt{250^2-(150\sqrt{2})^2}=264.58$.由于台风速度为每小时40km,故持续时间为 $264.58\div40\approx6.6$ 小时.

3　与椭圆有关的应用题

例3　某检验员通常用一个直径为2cm和一个直径为1cm的标准圆柱,检测一个直径为3cm的圆柱,为保证质量,有人建议再插入两个合适的同号标准圆柱,问这两个标准圆柱的直径为多少?

分析　设直径为3,2,1的圆的圆心分别为 O,A,B,则问题即为求两等圆,使它与圆 O 内切、与圆 A,B 外切;以 O 为原点,以 AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系,则 $A(-\frac{1}{2},0)$,$B(1,0)$,设所求两等圆的半径为 r,圆心分别为 P,Q,则 $|PA|+|PO|=(1+r)+(1.5-r)=2.5$,即点 P 在以 A,O 为焦点,以2.5为长轴长的椭圆上,其椭圆方程为 $\frac{16(x+\frac{1}{4})^2}{25}+\frac{2y^2}{3}=1$　①

同理,点 P 又在以 O,B 为焦点,以2为长轴长的椭圆上,其椭圆方程为 $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{4y^2}{3}=1$　②

联立①、②得 $P(\frac{9}{14},\frac{6}{7})$、$Q(\frac{9}{14},-\frac{6}{7})$.

所以 $r=|PA|-1=\sqrt{(\frac{9}{14}+\frac{1}{2})^2+(\frac{6}{7}-0)^2}-1=\frac{3}{7}$.

故两个标准圆柱的直径为 $\frac{6}{7}$cm.

例4　如图2,某隧道设计为双向四车道,车道总宽为22m,要求通行车辆限高4.5m,隧道全长2.5km,隧道的拱线可近似地看成半个椭圆形状.

(1)若最大拱高 h 为6m,则隧道设计的拱宽 l 是多少;

(2)若最大拱高 h 不小于6m,则应如何设计拱高 h 和拱宽 l,才能使半个椭圆形隧道的土方工程量最小?(注:半个椭圆的面积公式为 $S=\frac{\pi}{4}lh$,柱体的体积=底面积乘以高).

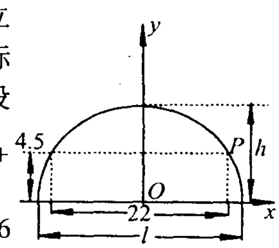

图2

分析　(1)建立如图所示的直角坐标系,则 $P(11,4.5)$,设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,将 $b=h=6$ 及点 $P(11,4.5)$ 代入,得 $a=\frac{44\sqrt{7}}{7}$,此时,$l=2a=\frac{88\sqrt{7}}{7}\approx33.3$.

(2) 由椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，得 $\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}=1$.

由于 $1=\frac{11^2}{a^2}+\frac{4.5^2}{b^2}\ \frac{2\times11\times4.5}{ab}\Rightarrow ab\geqslant99$ 且 $b=h,l=2a$.

所以 $S=\frac{\pi}{4}lh=\frac{\pi ab}{2}\geqslant\frac{99\pi}{2}$，当 S 取得最小值时，有 $\frac{11^2}{a^2}=\frac{4.5^2}{b^2}=\frac{1}{2}$，因此 $a=11\sqrt{2},b=\frac{9\sqrt{2}}{2}$，此时，$l=2a=22\sqrt{22}\approx31.1,h=b\approx6.4$.

故当拱高约为 6.4m，拱宽约为 31.1m 时，土方工程量最小.

4 与双曲线有关的应用题

例5 如图3，B 地在 A 地的正东方向 4km 处，C 地在 B 的北偏东 30° 方向 2km 处，河流的沿岸 PQ(曲线)上任意一点到 A 的距离比到 B 的距离远 2km，现要在曲线 PQ 上选一处 M 建一座码头，向 B,C 两地转运货物，经测算，从 M 到 B、C 修建公路的费用分别为 a 万元/km、$2a$ 万元/km，求修建这两条公路的最低费用.

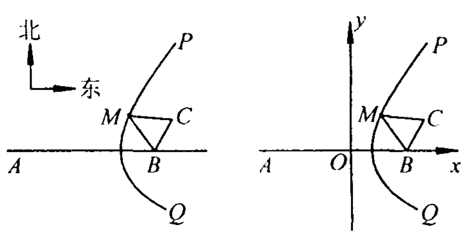

图 3

分析 以 A,B 所在直线为 x 轴，线段 AB 的中垂线为 y 轴，建立直角坐标系. 设曲线上任意一点 P 的坐标为 (x,y). 由 $|PA|-|PB|=2$ 及 $|AB|=4$ 知点 P 在以 A,B 为焦点，实轴长为 2 的双曲线的右支上.

因为 $2a=2,2c=4$ 所以离心率 e 为 2，曲线的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1(x\geqslant1)$.

总费用 $W=a\cdot|MB|+2a\cdot|MC|=2a(\frac{|MB|}{2}+|MC|)=2a(\frac{|MB|}{e}+|MC|)$.

再设 M 到相应于 B 的准线 l 的距离为 d，则

$\frac{|MB|}{d}=e$，即 $d=\frac{|MB|}{e}$.

于是，$W=2a(d+|MC|)$，当 $d+|MC|$ 最小，即 M 到准线的距离与到 C 点的距离之和最小时，总费用最小；此时，点 M 在自点 C 向准线所作的垂线段上.(余略)

5 与抛物线有关的应用题

例6 某跳水运动员进行 10m 跳台跳水训练时，身体(看成一点)在空中的运动路线是如图4所示坐标系内经过原点 O 的一条曲线(图中标出的数据为已知条件)，

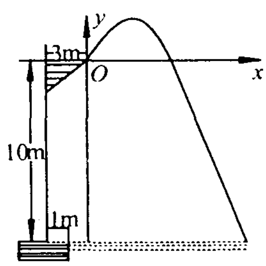

图 4

在跳某个规定动作时，正常情况下，该运动员在空中的最高处距水面 $10\frac{2}{3}$m，入水处距池边的距离为 4m，同时，运动员在距水面高度为 5m 以前，必须完成规定的翻腾动作，并调整好入水姿势，否则，就会出现失误. 问：当该运动员调整好入水姿势时，与池边的距离恰为 $3\frac{3}{5}$m，他此次跳水会出现失误吗？

分析 根据题意我们可设曲线是抛物线，其方程为 $y=ax^2+bx+c$，最高点的纵坐标为 $\frac{2}{3}$，且经过点(2，-10)及原点因此，

得 $\begin{cases}c=0,\\ \frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{2}{3},\\ 4a+2b+c=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{25}{6},\\ b=\frac{10}{3},\\ c=0\end{cases}$ 或

$$\begin{cases} a = -\dfrac{3}{2}, \\ b = -2, \\ c = 0. \end{cases}$$

由于抛物线在 y 轴的右侧,因此 $-\dfrac{b}{2a} > 0$,即 a,b 的符号相反.

故抛物线的方程为 $y = -\dfrac{25}{6}x^2 + \dfrac{10}{3}x$.

当该运动员调整好入水姿势时,与池边的距离恰为 $3\dfrac{3}{5}$m,此时,$x = 3\dfrac{3}{5} - 2 = \dfrac{8}{5}$,$y = (-\dfrac{25}{6}) \times \dfrac{8}{5} + \dfrac{10}{3} \times \dfrac{8}{5} = -\dfrac{16}{3}$,此时,运动员离水面的距离为 $10 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{14}{3} < 5$.

故此次跳水会出现失误.

加强变式教学,提高课堂教学效率

青岛二中数学组 266000 于世章

“变式教学”是课堂教学过程中学生获取知识的重要途径之一,在一个有着变式潜能的问题中,可以多角度、全方位地折射出该问题所在学科部分或全部的内涵,正所谓数学“DNA”,它改变了“被动灌输”和“机械训练”的那种沉闷的课堂教学模式,将整个课堂教学变成学生思维活动的有机体,用 MM 的教学观点去解剖,就是把教学与学习、教学与研究融为一体,让学生在学习中探究,在探究中学习,它较好地诠释了 MM 教学、学习和研究同步协调原则,具有很强的可操作性.在这一过程中,学生由被动接受变为主动参与,充分体现了课堂教学的多样性和教学过程的层次性.本人在多年的教学过程中积极采用“变式教学”,遵循数学问题解决的基本思路“将未知的问题划归为已知的问题,将复杂的问题划归为简单的问题”,鼓励学生“大胆猜想,小心求证”,使学生在归纳、类比、猜想的思维方法之下享受到数学发现的乐趣,课堂教学生动活泼,效果良好,本文就具体的教学过程中怎样进行“变式教学”谈如下看法:

数学课堂教学的重点怎样展开,难点怎样克服,应讲究层次性,采用“变式教学”的方式,由浅入深,做到起点低、目标高,小综合,遵循“由简单到复杂,再由复杂到简单”的哲学观点,充分体现化归的数学思想,使学生触类旁通,举一反三,常常收到事半功倍的效果.如人教社全日制普通高级中学教科书(必修)数学第二册(上)p·78 例 5,我是这样进行“变式教学”的:

案例 (p·78 例 5) 已知一曲线是与两个定点 $O(0,0)$、$A(3,0)$ 距离的比为 $\dfrac{1}{2}$ 的点的轨迹,求此曲线的方程,并画出曲线.

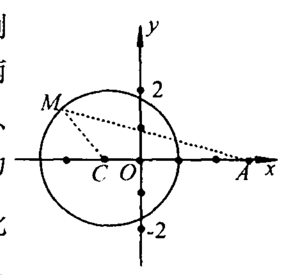

图 1

解 在给定的坐标系里,设点 $M(x,y)$ 是曲线上的任意一点,也就是点 M 属于集合 $P = \{M \mid \dfrac{|OM|}{|AM|} = \dfrac{1}{2}\}$.

由两点间的距离公式,点 M 的坐标所适