谈开放性试题的求解

广东　许少华

开放性试题可以较好地考查考生的创新思维能力与主动探索能力，可以充分体现"出活题、考能力"的命题指导思想；更代表着全面考查考生数学综合素质的命题改革方向。因此，它是高考命题的热点，为使考生较全面地了解开放性试题，增强求解能力。本文将介绍开放性试题的求解策略，供参考。

一、常见的类型

常见的开放型试题的类型有：①条件开放型：有确定的结论，探求使结论成立的条件；②结论开放型：结论的多样性，使根据条件可以得到多个结论，即没有确定唯一的结论；③策略开放型：由条件通向结论的"路"有多条，不同的'路'可能烦、简不一；④综合开放型：兼有条件开放、结论开放及策略开放中的两种及以上复合而成的开放型问题；开放性试题符合中学生好奇、好胜的心理，同时又具有新颖性、趣味性，因而是受中学生喜爱的题型；由于它思维的探究性、多向性及不定性又决定了它是中学生最不易完全求解的问题；对于中学生可以说"爱它不容易"，下面介绍常规的求解策略。

二、常见求解策略

1、等价转化

从题目条件出发，抓住探索的实质；将探索性问题等价的转化为一般的求解型问题。

例1、射线 OA、OB 的方程分别为：$y=\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$ 和 $y=-\sqrt{3}x(x\geqslant 0)$，线段 CD 的两端点分别在 OA，OB 上滑动，若 $|CD|=4\sqrt{3}$，问是否存在两定点，使 CD 的中点 P 到这两定点的距离之和为定值？若存在，求出这两个定点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由。

分析：本题属结论开放型；由"点 P 到两定点的距离之和为定值"想到了椭圆的第一定义，假若点 P 的轨迹是椭圆，则两定点存在且为椭圆两焦点，定值为椭圆的长轴长；否则，不存在、显然，问题被等价的转化为求点 P 轨迹；

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$P(x,y)$则 $x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$

$$由\begin{cases}y_1=\sqrt{3}x_1\\ y_2=-\sqrt{3}x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1-y_2=2\sqrt{3}x\\ x_1-x_2=\dfrac{2y}{\sqrt{3}}\end{cases}又由$$

$|CD|=4\sqrt{3}$得$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=48\Rightarrow(\frac{2y}{\sqrt{3}})^2+(2\sqrt{3}x)^2=48$ 即$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

故存在两点$(0,4\sqrt{2})$，$(0,-4\sqrt{2})$，使 P 到这两定点的距离之和为 12。

2、特值验证

"投石问路"是处理问题的计策之一，面对探索性

问题找一个特殊值代入验证一下，有时发现问题的求解思路。

例 2、设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[-a,a]\ (a>0)$ 上的函数，且满足：(i) $f(-a)=f(a)=0$；(ii) 对任意的 $u,v\in[-a,a]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$

(1)证明：对任意的 $x\in[-a,a]$，都有：$x-a\leqslant f(x)\leqslant a-x$；

(2)证明：对任意的 $u,v\in[-a,a]$，都有：$|f(u)-f(v)|\leqslant a$

(3)在区间 $[-a,a]$ 上是否存在满足题设的条件的奇函数 $y=f(x)$，且使得

$$\begin{cases}|f(u)-f(v)|<|u-v|,u,v\in[0,\frac{a}{2}]\\|f(u)-f(v)|<|u-v|,u,v\in[\frac{a}{2},a]\end{cases}$$

若存在，请举一例；若不存在，请说明理由；

分析：本题(3)属条件开放型；对于(3)从分段函数表示的角度，想一想定义域的区间划分，一般情况下不会将某一值划入两个区间，但这里的 $\frac{a}{2}$ 就出现在两个区间中；因此，特值验证便油然而生。

(3)Θ$y=f(x)$ 为奇函数，$\therefore f(0)=0$ 又由于 $f(a)=0$，则

$$|f(\frac{a}{2})|=\begin{cases}|f(\frac{a}{2})-f(0)|<|\frac{a}{2}-a|=\frac{a}{2}\\|f(\frac{a}{2})-f(a)|<|\frac{a}{2}-a|=\frac{a}{2}\end{cases}$$ 显然矛盾，故不存在；

3、借助图形

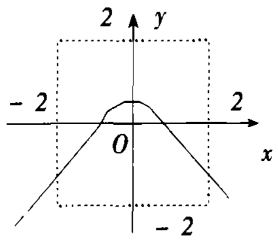
当遇到的问题较为抽象，转化及分析都有困难时，想一想图形，借助图形也许会“柳暗花明”。

例 3、对于函数 $f(x)=-x^2+px+q\ (|p|<4)$ 是否存在实数对 (p,q)，使 $|f(x)|>2$ 在区间 $(-2,2)$ 内无解？

分析：本题属条件开放型；对于与二次函数、二次不等式及二次方程有关的问题，经验告诉我们要借助图形；这里是函数与不等式的结合应该不会例外。

如图，若实数对存在，则 $\begin{cases}f(-2)\geqslant-2\\f(2)\geqslant-2\\f(-\frac{p}{2})\leqslant2\end{cases}\Rightarrow$

$$\begin{cases}-2p+q-2\geqslant0\wedge\wedge(1)\\2p+q-2\geqslant0\wedge\wedge(2)\\\frac{3p^2}{4}-q+2\geqslant0\wedge\wedge(3)\end{cases}$$



(1)+(3)得：$\frac{3p^2}{4}-2p\geqslant0\Rightarrow p\geqslant\frac{8}{3}$ 或 $p\leqslant0$

(2)+(3)得：$\frac{3p^2}{4}+2p\geqslant0\Rightarrow p\leqslant-\frac{8}{3}$ 或 $p\geqslant0$

因此 $p=0$，将 $p=0$ 代入(1)、(2)得：$q=2$

故存在实数对 $(0,2)$ 满足题意。

4、假设存在

“是否存在”型问题的一个常见思路是：假设存在；在这个假设下进行推理、分析、计算，如果出现矛盾，说明不存在；否则，说明存在；

例 4、设数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，且 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2$，问：是否存在正整数 c,k，使 $\frac{a_{k+1}-c}{a_k-c}>2$ 成立？

分析：本题也是条件开放型，对于此题我们利用假设存在；

由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+2\Rightarrow a_{n+1}-4=\frac{1}{2}(a_n-4)\Rightarrow a_n=4(1-\frac{1}{2^n})$

若存在正整数 c,k 使 $\frac{a_{k+1}-c}{a_k-c}>2$ 成立，则 $\frac{\frac{1}{2}a_k+2-c}{a_k-c}>2\Rightarrow\frac{c-(\frac{3}{2}a_k-2)}{c-a_k}<0$

由于 $(\frac{3}{2}a_k-2)-a_k=\frac{1}{2}a_k-2<0\quad\therefore\frac{3}{2}a_k-2<c<a_k$

由于 $a_k>a_{k-1}\Rightarrow\frac{3}{2}a_k-2>\frac{3}{2}a_{k-1}-2>\wedge>\frac{3}{2}$

$a_1-2>1$,又 $a_k<4$,所以 c 的可取值只能是 2 或 3;

当 $c=2$ 时,得 $2<a_k<\frac{8}{3}$,由于 $a_1=2$ 且 $k\geqslant 2$ 时,$a_k\geqslant 3$,显然不符;

当 $c=3$ 时,得 $3<a_k<\frac{10}{3}$,由于 $a_1=2$

$a_2=3$ 且 $k\geqslant 3$ 时,$a_k\geqslant\frac{7}{2}>\frac{10}{3}$,显然不符;

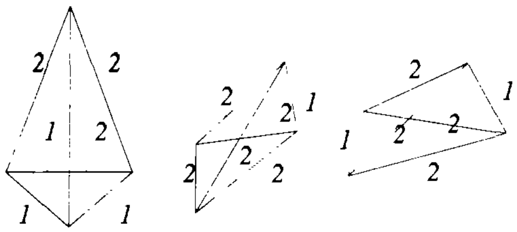
故正整数 c,k 不存在

5、勿求全面

对于结论开放型问题,往往结论不是唯一的,而题目的要求也只是有一个正确结论即可;面对这样的问题,勿求全面。否则,劳而无功或劳而有过。

例5、若四面体各棱长是 1 或 2 且该四面体不是正四面体,则四面体的体积为________。(只需填上一个可能值)

分析:本题属结论开放型,由"只需填上一个可能值",即知要求择其一即可;



易得有如上图所示的三种类型经计算它们的体积分别为:$\frac{\sqrt{14}}{12},\frac{\sqrt{11}}{6},\frac{\sqrt{11}}{12}$;选择其一,便满足要求。

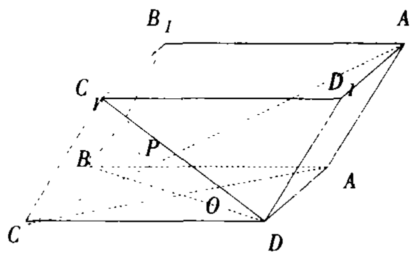
例6、已知 α,β 是两个不同的平面,m,n 是 $\alpha、\beta$ 之外的两条不同直线,给出四个论断:①$m\perp n$,②$\alpha\perp\beta$,③$n\perp\beta$,④$m\perp\alpha$ 以其中的三个论断为条件,余下的一个论断为结论,写出你认为正确的一个命题________。

分析:本题属综合开放题,也仅要求写一个正确命题。因此,只需根据线面位置关系进行分析、判断产生一个即可。经分析得②③④⇒①或①③④⇒②

6、执果索因

条件开放型问题在探求成立的条件时,往往执果索因;逐渐寻求结论成立的充分条件或充要条件,直至诞生所要求的结果。

例7、(2000年全国高考题)如图,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD$



(Ⅰ)证明:$C_1C\perp BD$

(Ⅱ)当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值等于多少时,能使 $A_1C\perp$ 面 C_1BD? 请给出证明。

分析:本题是条件开放型、对此我们"执果索因"。

(Ⅰ)略

(Ⅱ)思路一:由于 $ABCD$ 是菱形,得 $BD\perp AC$ 且 $CD=CB$,又结合 $\angle C_1CB=\angle C_1CD\Rightarrow C_1D=C_1B$,从而 $BD\perp C_1O$,因此 $BD\perp$ 面 $CC_1A_1A\Rightarrow BD\perp A_1C$

欲使 $A_1C\perp$ 面 C_1BD,只需 $A_1C\perp C_1D$。比较 $BD\perp A_1C$ 的证明,即知只要 C_1CDD_1 为菱形即可,此时 $\frac{CD}{CC_1}=1$

思路二:如上图,设 $C_1C=1$,$CD=x$,$\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=\theta$

若 $A_1C\perp$ 面 C_1BD,再设 A_1C 与 C_1O 交于 P,则 $A_1C\perp C_1O$,$\therefore\triangle PCO$ 为直角三角形,由 $\frac{OP}{PC_1}=\frac{PC}{PA_1}=\frac{OC}{A_1C_1}=\frac{1}{2}$ 及 $PC^2+OP^2=OC^2$ 得:$(\frac{1}{3}A_1C)^2+(\frac{1}{3}OC_1)^2=(\frac{1}{2}AC)^2$

即:$4(C_1O^2+A_1C^2)=9AC^2$ ……………………… ①

由于 $C_1D^2=1+x^2-2x\cos\theta$,$\therefore C_1O^2=C_1D^2-(\frac{1}{2}BD)^2=1+x^2-2x\cos\theta-\frac{1}{4}(2x^2-2x^2\cos\theta)$ … ②

$AC^2=x^2+x^2-2x^2\cos(\pi-\theta)=2x^2(1+\cos\theta)$ ……………………………………………… ③

$\therefore AC=2x\cos\frac{\theta}{2}$

由 $\cos\theta=\cos\angle C_1CO\cdot\cos\frac{\theta}{2}$ 得:$A_1C^2=AC^2+AA_1^{\,2}$

$-2AC\cdot AA_1\cos(\pi-\angle C_1CO)=2x^2+2x^2\cos\theta+4\pi\cos\theta$ ……………………………………… ④

将②、③、④代入①整理得：$(x-1)(x+1+x\cos\theta)=0\therefore x=1$

即$\frac{CD}{C_1C}=1$时 $A_1C\perp$面 C_1BD

7、引入记号

有些探索性问题表面上看不一定象数学问题，当我们适当地引入记号、恰到好处的揭示规律之后，结论会渐趋明朗。

例8、一个计算装置有两个数据输入口 A_1、A_2，一个输出口 B。计算过程是由 A_1、A_2 分别输入自然数 m、n，经过计算后得自然数 k 由 B 输出，此种计算装置完成的计算满足以下三个性质：①若 A_1、A_2 都输入1时，输出的结果为1 ②若 A_1 输入固定自然数不变，A_2 输入自然数增大1时，输出结果比原来增大2 ③若 A_2 输入1，A_1 输入自然数增大1时，输出结果为原来的2倍。

试问：(Ⅰ)若 A_1 输入1，A_2 输入自然数 n，输出结果是多少？

(Ⅱ)若 A_2 输入1，A_1 输入自然数 m，输出结果是多少？

(Ⅲ)若 A_1 输入自然数，A_2 输入自然数 n，输出结果是多少？

分析：本题引入 $f(m,n)=k$，$(m,n\ k\in N)$表示 A_1 输入 m，A_2 输入 n 时，B 输出 k，则条件①、②、③即为 $f(1,1)=1$，$f(m,n+1)=f(m,n)+2$，$f(m+1,1)=2f(m,1)$

(Ⅰ)由 $f(m,n+1)=f(m,n)+2$ 令 $m=1$ 得：$f(1,n+1)=f(1,n)+2$ 由等差数列知 $f(1,n)=f(1,1)+2(n-1)=2n-1$

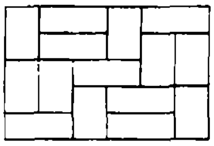
(Ⅱ)由 $f(m+1,1)=2f(m,1)$结合等比数列知 $f(m,1)=2^{m-1}f(1,1)=2^{m-1}$

(Ⅲ)由(Ⅰ)、(Ⅱ)知 $f(m,n)=f(m,1)+2(n-1)=2^{m-1}+2n-2$

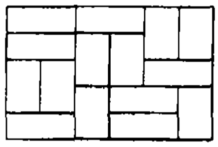
8、认清本质

有些应用型开放性问题，既具有开放性试题的探索性又具有应用型问题的复杂性；条件中的文字叙述及新概念、新术语的引入，让学生进入了一个全新的环境。用哪些知识来解答？一时摸不到头脑。对于此类问题一定要认清本质，抓住关键，同时展开必要的联想，寻求破解工具。

例9、图(1)是用15块 1×2 的矩形砖铺满 5×6 的矩形地面的一种"无直缝"铺法。图(2)则有一条"直缝"(即有一条完全穿过矩形的直线，但没有穿透任何砖块)



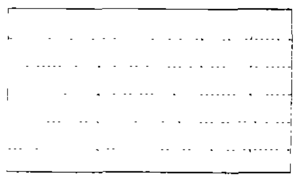
图(1)



图(2)

问：是否存在用18块 1×2 矩形砖块铺满 6×6 的正方形地面"无直缝铺法"？证明你的结论。

分析：本题属结论开放型问题同时又具有应用题的特色，乍一看，真有难度；从"18块 1×2 矩形"与"6×6 的正方形"的面积上看正好相等，由于并非随便铺，因而探求满足"无直缝铺法"最少需多少块砖是求解的本质。认清了这个本质，解法也就诞生了。



用纵、横共10条虚线将 6×6 的正方形分成36个小方格则砖与砖之间的缝只存在于虚线上。

如果存在"无直缝"铺法，则每条虚线至少被一块砖遮断；若某条虚线仅被一块砖遮断，则这条虚线两侧(除了被遮住的小方格外)的方格数必为奇数，此时无法用 1×2 的砖铺满。因此，每条虚线至少被两块砖遮断这样至少需要20块砖，而已知仅18块。故不存在"无直缝"铺法。

开放型试题是一种新型的试题，随着教育改革与命题改革的深入，它在试卷中的比例将会越来越大，掌握此类问题的求解，很有必要。本文权当抛砖引玉，不妥之处，敬请赐教。 (审稿人：周沛耕)