等比恒等式与等差恒等式

528415 广东省中山市小榄中学 许少华 528400 广东省中山市实验高中 马荣林

两恒等式$a_n = a_1 \cdot \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$及$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_n - a_{n-1})$分别被称之为等比恒等式与等差恒等式. 在处理很多数列问题时, 若能恰到好处地利用这两个恒等式, 则会给求解带来很多方便, 下面略举几例.

例1 (2002年浙江等21省市高考题) 设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = a_n^2 - na_n + 1$, $n \in \mathbf{N}^+$.

(1) 当$a_1 = 2$时, 求a_2、a_3、a_4, 并由此猜想出a_n的一个通项公式.

(2) 当$a_1 \geqslant 3$时, 证明对所有的$n \geqslant 1$有:

(i) $a_n \geqslant n+2$;

(ii) $\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{1}{2}$.

简解: (1) 略.

(2) (i) 用数学归纳法: ① 当$n=1$, $a_1 \geqslant 3 = 1+2$结论成立.

② 假设当$n=k$时结论成立, 即$a_k \geqslant k+2$, 那么$a_{k+1} = a_k(a_k - k) + 1 \geqslant (k+2)(k+2-k) + 1 > k+3$, 即$n = k+1$时结论成立.

故$a_n \geqslant n+2$.

(ii) 由$a_{n+1} = a_n(a_n - n) + 1 \geqslant a_n(n+2-n) + 1 = 2a_n + 1$, 得$\frac{1+a_n}{1+a_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2}$, $\because \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1+a_1} \cdot \left(\frac{1+a_1}{1+a_2}\right) \cdot \left(\frac{1+a_2}{1+a_3}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{1+a_{n-1}}{1+a_n}\right) \leqslant \frac{1}{1+a_1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 又由于$a_1 \geqslant 3$, 因而$\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \cdots + \frac{1}{1+a_n} \leqslant \frac{1}{1+a_1}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] \leqslant \frac{2}{1+a_1} \leqslant \frac{1}{2}$.

评注: 2002年全国五套试卷 (浙江等、北京、山西等、广东等、上海) 中的四套试卷有递推数列问题, 看来应该引起大家的重视. 此题的这种求解令人耳目一新, 有一种简捷明快的感觉. 比标准答案提供的方法要好一点, 再看用此法求解的两个"历史问题":

例2 数列$\{x_n\}$满足$x_1 = \alpha > 3$, 且$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2(x_n - 1)}$, $n \in \mathbf{N}$. 试证: 当$n \geqslant \frac{\lg \frac{\alpha}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$时, $x_n < 3$ (84年高考理科压轴题的最后一小题).

简证: 因为$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{2(x_n - 1)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x_n - 1}\right)$, 故当$x_k > 3$时, $\frac{x_{k+1}}{x_k} < \frac{3}{4} < 1$.

假设当$n \geqslant \frac{\lg \frac{\alpha}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$时, 有$x_{n+1} \geqslant 3$, 由$x_1 > x_2 > \cdots > x_n > x_{n+1} \geqslant 3$及$x_1 = \alpha$, 得$3 \leqslant x_{n+1} = x_1\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \cdot \cdots \cdot \left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right) < \alpha\left(\frac{3}{4}\right)^n \Longrightarrow n < \frac{\lg \frac{\alpha}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$与已知矛盾. 故$x_n < 3$.

例3 若数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$, 求证: 数列$\{a_n\}$为等差数列 (92年高考试题).

简证: 由$a_n = S_n - S_{n-1}$
$\Longrightarrow a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} - \frac{(n-1)(a_1 + a_{n-1})}{2}$
$\Longrightarrow \frac{a_n - a_1}{a_{n-1} - a_1} = \frac{n-1}{n-2}$.

因此$a_n - a_1 = (a_2 - a_1) \cdot \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} \cdot \frac{a_4 - a_1}{a_3 - a_1} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n - a_1}{a_{n-1} - a_1} = (a_2 - a_1) \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \cdots \cdot$

$\frac{n-1}{n-2} \Longrightarrow a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) \Longrightarrow a_n - a_{n-1} = a_2 - a_1$.

故数列$\{a_n\}$为等差数列.

下面再看关于等差恒等式应用的两例.

例4 设$a_0 = 2002$, 对于任何非负整数n, 均有$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1}$. 求证: $2002 - n$是小于等于a_n的最大整数 (其中$1 \leqslant n \leqslant 1002$).

简证: 由$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n+1} \Longrightarrow a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n+1} - 1 < 0 \Longrightarrow a_n = a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = a_0 - n + \left(\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+1}\right) > a_0 - n$, 且$a_{n+1} < a_n$,

若$1 \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}(a_0+2) \Longrightarrow a_0 - (n-1) \geqslant n - 1 \geqslant 0$,

因此$\frac{1}{a_0+1} + \frac{1}{a_1+1} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}+1} \leqslant \frac{n}{a_{n-1}+1} \leqslant \frac{n}{a_0-n+2} < 1$,

故$a_0 - n < a_n < a_0 - n + 1$, 从而$a_n$的整数部分$a_0 - n$.

因此当$a_0 = 2002$, $1 \leqslant n \leqslant 1002$时, 即得本题结论.

例5 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2$, 求证:

$\frac{n+1}{n+2} < a_n < n$.

简证: 易得$a_n > a_{n-1} > 0$, 又$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 < a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_n a_{n-1} \Longrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n^2}$, $\therefore \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) < 1 + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \Longrightarrow a_n < n$. 又$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 < a_{n-1} + \frac{n-1}{n^2}a_{n-1} \Longrightarrow a_{n-1} > \frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$, 得

$$a_n > a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1} \cdot \frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$$

$\Longrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} > \frac{1}{n^2+n-1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,

$\therefore \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$.

$\because a_1 = \frac{3}{4}$, $\therefore \frac{1}{a_n} < \frac{5}{6} + \frac{1}{n+1} < \frac{n+2}{n+1}$.

于是结论成立.

可以看出, 无论是等比恒等式还是等差恒等式在利用上都有一定的灵活性, 都要从已知的递推式出发进行适当的变形, 构造出理想的恒等式, 从而使问题得解.

(上接第6-7页)

小学阶段, 国家为教师提供所必需的背景知识中, 数学课程实在太少了. 因此, 还有什么其他的理由来解释教师联盟对数学课程的担心呢?

为了保证实行新课程的质量, 纽约教育局承诺会对教"阅读"和"数学"新课程的教师进行大力培训, 但这最多只是临时措施. 如果我们的孩子需要进行基础知识和抽象思维的发展, 那么下一代教师就需要学习更多的学科知识.

回想大家自己所接受过的教育: 最优秀老师的教学方式都是传统的和新型的结合, 不但要求你记忆, 而且同样要求你进行分析. 他们教授你新单词时, 有些是通过直接读出单词的音, 有些则是把新的单词放进场景故事中. 在数学教育中, 有些数学运算法则需要死记硬背, 有些则可以通过学生自己的体验.

当然, 我们的孩子理应受到这样的教育. 但这仅当我们能够提供有知识的老师时才能做到. 到那时, 无益的文化"战争"也许仍会盛行, 甚至非常激昂、猛烈, 但已没什么意义了.

注: Jonathan Zimmerman是纽约大学Steinhardt教育学院的历史学和教育学教授, 《谁的美国?—公立学校的文化战争》一书作者.