则$11c+2d=998-909=89$.

(3) 由于$0\leqslant 2d\leqslant 18$, 则$89-18=71\leqslant 11c\leqslant 89$, 故$c=7$或8.

当$c=7$时, $11c+2d=77+2d=89$, 有$d=6$. 当$c=8$时, $11c+2d=88+2d=89$, 有$d=\frac{1}{2}$, 应舍去.

∴ 这个四位数是1976.

例4 老师有一叠书分给A、B、C、D、E五个学生, 先将其中一半给A, 接着把剩下的$\frac{1}{4}$分给B, 再把剩下的$\frac{1}{3}$分给C, 最后D与E平分, 若E得到6本, 则老师的这一叠书原来共有多少本?

分析: 我们从最后分得的结果来考虑这个问题, 因为最后D与E平分, 而E得到6本, 所以D也得到6本, 也就是说分给C后余12本, 又"把余下的$\frac{1}{3}$分给C", 所以C也得到6本, 因此分给B后还有书18本. 由于"把剩下的$\frac{1}{4}$给B", 所以B也得到6本, 这样分给A后, 还剩下24本, 又"A分得原书的一半", 所以老师这一叠书原来共有48本.

圆锥曲线中最值问题分类例析

528415 广东省中山市小榄中学 许少华

与最值有关的问题是圆锥曲线中的一类重要题型. 在各级各类的试卷中随处可见, 由于涉及的知识面广、求解的灵活性大, 致使很多同学感到困难. 而圆锥曲线问题又有很强的类比性, 因此, 本文仅对椭圆中的最值问题进行分类例析, 望由此窥见一斑.

1. 线段和与差的最值

例1 已知$A(4,0)$、$B(2,2)$是椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$内的一点, M是椭圆上的一动点, 则$|MA|+|MB|$的最大值为___, 最小值为___.

分析: 易知A为椭圆的右焦点, 设左焦点为F_1, 由$a^2=25$知$|MF_1|+|MA|=10$, 因此$|MA|+|MB|=10+|MB|-|MF_1|$. 问题转化为"求椭圆上一点M到B、F_1两点距离之差的最大值与最小值", 因此, 连BF_1并延长交椭圆于两点, 其一使$|MB|-|MF_1|$最大, 另一个使$|MB|-|MF_1|$最小.

最大值为$10+2\sqrt{10}$, 最小值为$10-2\sqrt{10}$.

评注: 利用定义促使问题转化, 然后再利用数形结合是求解此类问题的重要途径. 类似题如: "若点$A(3,2)$, F为抛物线$y^2=4x$的焦点, P为抛物线上任意一点, 求$|PF|+|PA|$的最小值"(答案: 4). "点P在双曲线$3x^2-y^2=12$上, 点$M(6,1)$, 若F为双曲线的右焦点, 求$|PM|+\frac{1}{2}|PF|$的最小值"(答案: 5).

2. 弦长的最值

例2 由椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$的顶点$B(0,-b)$引一条弦$BP$, 求$BP$的最大长度.

分析: 设点P的坐标为(x,y), 由$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$得: $x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2\ (-b\leqslant y\leqslant b)$, 所以

$$|BP|=\sqrt{x^2+(y+b)^2}=\frac{1}{b}\sqrt{(b^2-a^2)y^2+2b^3y+b^2(a^2+b^2)}.$$

(i) 当$\sqrt{2}b\leqslant a$时, $y=-\frac{b^3}{b^2-a^2}$得:

$|BP|_{\min}=\frac{a^2}{a^2-b^2}\sqrt{a^2-b^2}$;

(ii) 当$\sqrt{2}b>a$时, $y=b$得:

$|BP|_{\min}=2b$.

评注: 此类问题求解时, 通常转化为闭区间上二次函数的最值问题, 通过对称轴所处的位置进行分类, 然后得到结论. 类似题如"设$B(a,0)$, 求曲线$y^2=2x$上的点到B距离的最

小值.” (答案: $a \geqslant 1$时, 最小值为$\sqrt{2a-1}$; 当$a < 1$时, 最小值为$|a|$). “设椭圆的中心在原点, 长轴在x轴上, 离心率$e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 已知$P\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$到这个椭圆上的点的最远距离是$\sqrt{7}$, 求这个椭圆的方程, 并求椭圆上到点$P$的距离等于$\sqrt{7}$的点的坐标.”$\left(\text{答案: 方程为}x^2+4y^2=4;\text{坐标为}\left(-\sqrt{3},-\dfrac{1}{2}\right)\text{及}\left(\sqrt{3},-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

3. 面积的最值

例3 椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ $(a>b>0)$的左焦点为F, 过F点的直线l交椭圆于A、B两点, P为线段AB的中点, 当$\triangle PFO$的面积最大时, 求直线l的方程.

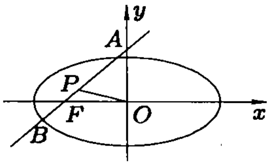

图 1

分析: 求直线方程, 由于$F(-c,0)$为已知, 仅需求斜率, 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$P(x_0,y_0)$, 则$y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

由于$S_{\triangle PFO}=\dfrac{1}{2}|OF|\cdot|y_0|=\dfrac{c}{2}|y_0|$, 只需保证$|y_0|$最大即可.

由$\begin{cases} y=k(x+c), \\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \end{cases} \Longrightarrow$

$(b^2+a^2k^2)y^2-2b^2cky-b^4k^2=0$,

$$|y_0|=\left|\frac{y_1+y_2}{2}\right|=\left|\frac{b^2ck}{b^2+a^2k^2}\right|$$

$$=\frac{b^2c}{\left|\dfrac{b^2}{k}+a^2k\right|}=\frac{b^2c}{\dfrac{b^2}{|k|}+a^2|k|}\leqslant\frac{bc}{2a},\text{得}$$

$$S_{\triangle PFO}\leqslant\frac{bc^2}{4a}.$$

此时$\dfrac{b^2}{|k|}=a^2|k| \Longrightarrow k=\pm\dfrac{b}{a}$, 故直线方程为: $y=\pm\dfrac{b}{a}(x+c)$.

评注: 点到直线的距离公式、韦达定理、弦长公式及基本不等式是求解此类问题的重要依据; 由于涉及运算的式子往往较为复杂, 因此除了掌握必备的常规技能外, 还应根据特点, 灵活处理. 类似题如: “已知抛物线$y=-\dfrac{1}{2}x^2+m$, 点A、B及$P(2,4)$均在抛物线上, 且PA、PB的倾斜角互补, 当直线AB在y轴上截距为正数时, 求$\triangle PAB$面积的最大值”$\left(\text{答案:}\dfrac{64\sqrt{3}}{9}\right)$.

4. 离心率的最值

例4 如图2, 已知梯形$ABCD$中$|AB|=2|CD|$, 点E分有向线段AC所成的比为λ, 双曲线过C、D、E三点, 且以A、B为焦点. 当$\dfrac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{3}{4}$时, 求双曲线离心率$e$的取值范围(2000年全国高考题).

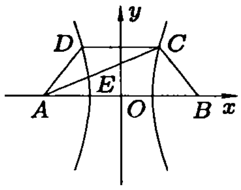

图2

分析: 以AB所在直线为x轴, AB中垂线为y轴, 建立直角坐角系, 如图2. 设$|AB|=2c$, 梯形的高为h, 则$A(-c,0)$、$C\left(\dfrac{c}{2},h\right)$, 由已知得$E\left(\dfrac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)},\dfrac{\lambda h}{1+\lambda}\right)$.

再设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 离心率为$e=\dfrac{c}{a}$, 由$C$、$E$在双曲线上得:

$$\begin{cases} \dfrac{c^2}{4a^2}-\dfrac{h^2}{b^2}=1 \\ \left[\dfrac{(\lambda-2)c}{2(\lambda+1)a}\right]^2-\left[\dfrac{\lambda h}{(1+\lambda)b}\right]^2=1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda=\frac{e^2-1}{e^2+2} \Longrightarrow \sqrt{7}\leqslant e\leqslant\sqrt{10}.$$

故双曲线的离心率范围为$[\sqrt{7},\sqrt{10}]$.

评注: 常规思路有两种: ① 利用基本量之间的关系, 结合不等式或函数最值进行求解. ② 利用圆锥曲线的第二定义, 结合图形进行求解. 类似题如: “设一系列椭圆的左顶点在抛物线$y^2=x-1$上, 它们的长轴都是4, 且都以y轴为左准线, 求离心率达到最大时的椭圆

方程."$\left(答案:\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{9y^2}{20}=1\right)$; "已知双曲线$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$的左、右焦点分别为$F_1$、$F_2$, 左准线为$l$. 若双曲线左支上存在一点$P$, 使$|PF_1|$是$P$到$l$的距离$d$与$|PF_2|$的比例中项, 求双曲线的离心率的最大值."(答案: $1+\sqrt{2}$).

5. 方程中的某一参数的最值

例5 已知椭圆$2x^2+(y-a)^2=2$上恰有两点到x轴的距离与到点$(0,1)$的距离相等, 求实数a的范围.

分析: 到x轴的距离与到点$(0,1)$的距离相等的点的轨迹是抛物线$x^2=2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)$, 问题转化为椭圆与抛物线恰有两个交点, 即联立方程组恰有两组解. 由$\begin{cases}2x^2+(y-a)^2=2\\ x^2=2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$
$\Longrightarrow y^2-2(a-2)y+a^2-4=0.$

设$f(y)=y^2-2(a-2)y+a^2-4$, 且方程$f(y)$的两根分别为: y_1与y_2, 则必有$y_1=y_2>\dfrac{1}{2}$或$y_1<\dfrac{1}{2}$且$y_2>\dfrac{1}{2}$. 即

$$\begin{cases}\Delta=4(a-2)^2-4(a^2-4)=0\\ 2(a-2)>1,\end{cases}$$

或$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$得: $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}<a<\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}$.

评注: 求解时, 利用转化思想将其等价地转化为方程组, 通过对方程在某个范围内有解性的探究使问题获解. 类似题如: "已知点$A(0,2)$、$B(4,0)$, 抛物线C: $y=-x^2+mx+1$且抛物线与线段AB有两个不同的交点, (1)求m的范围. (2)求抛物线C在线段AB上截得的最大弦长,"$\left(答案:(1)\ \dfrac{3}{2}<m\leqslant\dfrac{15}{4}, (2)\ \dfrac{15\sqrt{5}}{8}\right)$; "已知双曲线$(1-a^2)x^2+a^2y^2=a^2\ (a>1$上支的顶点为$A$, 且上支与直线$y=-x$交于点$P$, 一条以$A$为焦点, $M(0,m)$为顶点, 开口向下的抛物线通过点P, PM斜率为k, 且$\dfrac{1}{4}\leqslant k\leqslant\dfrac{1}{3}$, 求$a$的范围."$\left(答案:\dfrac{12}{7}\leqslant a\leqslant 4\right)$.

6. 角(或三角函数)的最值

例6 设P是离心率为$\dfrac{1}{2}$的椭圆$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\ (a>b>0)$上一点, F_1、F_2为椭圆的两个焦点, 若$\angle PF_1F_2=\alpha$, $\angle PF_2F_1=\beta$, 求$\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}$的最小值.

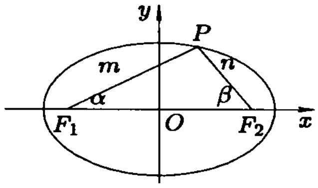

图 4

分析: 设$|PF_1|=m$, $|PF_2|=n$, $|F_1F_2|=2c$. 由$\dfrac{2c}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta)]}=\dfrac{m}{\sin\beta}=\dfrac{n}{\sin\alpha}=\dfrac{m+n}{\sin\alpha+\sin\beta}=\dfrac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}$, 得:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\alpha+\beta)$$
$$\Longrightarrow 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\Longrightarrow \tan\frac{\alpha}{2}\times\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}.$$
$$\because \frac{\alpha}{2}、\frac{\beta}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\therefore \tan\frac{\alpha}{2}>0,\ \tan\frac{\beta}{2}>0.$$

故$\tan\dfrac{\alpha}{2}+\tan\dfrac{\beta}{2}\geqslant 2\sqrt{\tan\dfrac{\alpha}{2}\cdot\tan\dfrac{\beta}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\tan\dfrac{\beta}{2}$, 即$\alpha=\beta$时, 等号成立.

评注: 利用正、余弦定理及圆锥曲线的定义, 将其转化为三角问题或不等式问题进行求解. 类似题如: "从椭圆上一点M向x轴作垂线, 恰好通过椭圆的左焦点F_1, 且其长轴端点A及短轴端点B的连线AB平行于OM. 若Q为椭圆上任意一点, F_2为右焦点, 求$\angle F_1QF_2$的最大值."(答案: 90°)

至此可以看出: 圆锥曲线的最值问题, 虽然形式多样、内容丰富, 只要我们能抓住最值的类型, 实施相应的求解策略, 同样可以化难为易、顺利求解.