数学竞赛中客观性试题的求解策略

许少华
(广东省中山市北大学园小榄中学,528415)

(本讲适合高中)

数学竞赛中的客观性试题无论从结构、形式,还是从分析、求解,都有独到、新颖之处.面对这类试题,如何合理、科学地分析,进而快速、准确地求解呢?本文将结合实例介绍10种求解策略,供参考.

1 合理预测

依据题目的信息特征,通过对试题条件及结论的深层分析,先进行初步预测,再逐步验证,是解这类问题的思路之一.

例1 若实数 x、y 满足

$$1+\cos^2(2x+3y-1)=\frac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1},$$

则 xy 的最小值为______.

分析:这是与三角有关的式子,求解时可能会用到三角函数的有界性.

由 $1+\cos^2(2x+3y-1)\leqslant 2$,预测

$$\frac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}\geqslant 2.$$

事实上

$$\begin{aligned}&\frac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}\\&=\frac{(x-y)^2+2(x-y)+2}{x-y+1}\\&=\frac{(x-y+1)^2+1}{x-y+1}\\&=(x-y+1)+\frac{1}{x-y+1},\end{aligned}$$

因 $\frac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}>0$,预测正确.

此时 $\begin{cases}x-y+1=1,\\2x+3y-1=k\pi\quad(k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

解得 $x=y=\frac{k\pi+1}{5}$.

因此,$xy=\left(\frac{k\pi+1}{5}\right)^2\geqslant\frac{1}{25}$.故答案为 $\frac{1}{25}$.

例2 四面体 $P-ABC$ 的6条棱长的和为 l,且 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^\circ$.则四面体体积的最大值为______.

(第5届美国数学奥林匹克)

分析:设 $PA=a$,$PB=b$,$PC=c$,易知

$$l=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2},\ V=\frac{1}{6}abc.$$

可看出以上两式都是关于 a、b、c 的轮换对称式,预测当 $a=b=c$ 时体积最大.

事实上

$$\begin{aligned}l&=a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt[3]{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}}\\&\geqslant 3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{abc},\end{aligned}$$

即 $abc\leqslant\left(\frac{l}{3+3\sqrt{2}}\right)^3$.此时

$$V\leqslant\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3+3\sqrt{2}}\right)^3.$$

显然,上述两个不等式中等号成立的条件均为 $a=b=c$.故答案为 $\frac{1}{6}\left(\frac{l}{3+3\sqrt{2}}\right)^3$.

2 看极端情形

通过最大、最小、最远、最近等特殊数或位置的考察,从而发现问题的结论.

例3 在正 n 棱锥中,相邻两侧面所成的二面角的取值范围为(　　).

(A) $\left(\frac{n-2}{n}\pi,\pi\right)$　(B) $\left(\frac{n-1}{n}\pi,\pi\right)$

收稿日期:2001-10-04

(C)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (D)$\left(\frac{n-2}{n}\pi,\frac{n-1}{n}\pi\right)$

(1994,全国高中数学联赛)

分析:当正棱锥的顶点无限接近底面时,两侧面所成的二面角无限接近于π;正棱锥的高无限增大时,二面角无限接近正n边形的一个内角,即$\frac{n-2}{n}\pi$.因此应选(A).

例4 设四面体四个面的面积分别为S_1、S_2、S_3、S_4,它们中最大的为S.记$\lambda=\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S}$,则$\lambda$一定满足( ).

(A)$2<\lambda\leqslant 4$ (B)$3<\lambda<4$

(C)$2.5<\lambda\leqslant 3.5$ (D)$3.5\leqslant\lambda<5.5$

(1992,全国高中数学联赛)

分析:若四面体是正四面体,则$\lambda=4$,否则$\lambda<4$;若四面体相对于某一面上的高无限接近于0时,$\lambda\to 2$,否则$\lambda>2$.因此应选(A).

3 层层深入

有些问题的求解想一步到位难度较大,若从问题的最简单情形入手,层层深入,问题就会渐趋明朗.

例5 设函数$f_0(x)=|x|$,$f_1(x)=|f_0(x)-1|$,$f_2(x)=|f_1(x)-2|$.则函数$y=f_2(x)$的图像与x轴所围成的图形中的封闭部分的面积为______.

(1989,全国高中数学联赛)

分析:若想直接作出$y=f_2(x)$的图像不易,但我们知道$y=f(x)$及$y=|f(x)|$的图像之间的关系.若按照顺序

$f_0(x)=|x|\to y=f_0(x)-1$

$\to f_1(x)=|f_0(x)-1|\to y=f_1(x)-2$

$\to f_2(x)=|f_1(x)-2|$

作图形变换,则易作出$y=f_2(x)$的图像.

易得答案为7.

例6 若$S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}$,则$S$的整数部分为( ).

(A)1 997 (B)1 998 (C)1 999 (D)2 000

(第8届“希望杯”高二试题)

分析:由$\sqrt{n-1}+\sqrt{n}<2\sqrt{n}<\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$得

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}).$$

令$n=2,3,\cdots,10^6$,得

$$2(\sqrt{10^6+1}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}<2(\sqrt{10^6}-1).$$

由于$2(\sqrt{10^6+1}-\sqrt{2})>2(\sqrt{10^6}-1.5)=1\,997$,$2(\sqrt{10^6}-1)=1\,998$,于是,

$$1\,998<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{10^6}}<1\,999.$$

故应选(B).

4 取特殊值

通过取特殊值可以排除某些备选项、简化推理及运算的过程,利用一个恰当的特殊值往往可以顺利地得到问题的结论.

例7 给定正数p、q、a、b、c,其中$p\neq q$.若p、a、q是等比数列,p、b、c、q是等差数列,则一元二次方程$bx^2-2ax+c=0$( ).

(A)无实根

(B)有两个相等实根

(C)有两个同号相异实根

(D)有两个异号实根

(2000,全国高中数学联赛)

分析:取$p=1,a=2,q=4,b=2,c=3$,则由一元二次方程$2x^2-4x+3=0$易得答案为(A).

例8 给定下列两个命题:

(1)设a、b、c都是复数.如果$a^2+b^2>c^2$,则$a^2+b^2-c^2>0$;

(2)设a、b、c都是复数.如果$a^3+b^2-c^2>0$,则$a^2+b^2>c^2$.

那么,下述说法正确的是( ).

(A)命题(1)正确,命题(2)也正确

(B)命题(1)正确,命题(2)错误.

(C)命题(1)错误,命题(2)也错误

(D)命题(1)错误,命题(2)正确

(1994,全国高中数学联赛)

分析:由 $a^2+b^2>c^2$ 说明 a^2+b^2 和 c^2 都是实数,因此 $a^2+b^2-c^2>0$ 正确.故命题(1)正确.

由 $a^2+b^2-c^2>0$ 有没有 $a^2+b^2>c^2$ 呢?取 $a^2+b^2=5+3i$,$c^2=2+3i$,即知命题(2)不成立.故应选(B).

5 变换视角

在解题的过程中,当思维受阻时,不妨换一个角度,变换一下视角,有时会产生"柳暗花明"的效果.

例 9 方程 $\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}}=x$ 的解为______.

分析:去根号求解很难进行下去.变换角度比较 x 与 $\sqrt{3+x}$ 的大小.若 $x<\sqrt{3+x}$,则

$$x<\sqrt{3+x}<\sqrt{3+\sqrt{3+x}}$$
$$<\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}$$
$$<\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+x}}}}$$

与已知矛盾;

同理,若 $x>\sqrt{3+x}$ 也与已知矛盾.

故有 $x=\sqrt{3+x}$,解得 $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

6 整体运算

运算或推理中适时地将一些式子看成一个整体,进行整体代入、整体变形、整体求解等,会巧妙产生结论.

例 10 数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{2n},a_{2n+1}$ 成等差数列,且下标为奇数的项之和为 60,下标为偶数的项之和为 45.则项数 $n=$______.

分析:由 $\begin{cases}a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}=60,\\ a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=45\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}(n+1)a_{n+1}=60,\\ na_{n+1}=45\end{cases}\Rightarrow\frac{n+1}{n}=\frac{4}{3},$$

解得 $n=3$.

例 11 若实数 a 满足 $a^5-a^3+a=2$,则( ).

(A) $a<\sqrt[6]{3}$ (B) $\sqrt[6]{2}<a<\sqrt[6]{3}$

(C) $\sqrt[6]{3}<a<\sqrt[3]{2}$ (D) $a>\sqrt[3]{2}$

(第 12 届"希望杯"高二试题)

分析:易知 $a>0,a\neq1$.因为

$$a^6+1=(a^2+1)(a^4-a^2+1)$$
$$=(a^2+1)\cdot\frac{a^5-a^3+a}{a}$$
$$=(a^2+1)\cdot\frac{2}{a}=2\left(a+\frac{1}{a}\right)>4,$$

所以 $a>\sqrt[6]{3}$.

由 $a^5-a^3+a=2$ 得

$$\frac{2}{a^3}+1=a^2+\frac{1}{a^2}>2.$$

所以,$a<\sqrt[3]{2}$.因此应选(C).

7 巧设辅助元

有些问题的条件与结论表面上看似乎没有什么联系,但通过巧设辅助元可把它们有机地结合起来,结论也就顺利地产生了.

例 12 已知△ ABC 的三边长 a、b、c 满足:(1) $a>b>c$,(2) $2b=a+c$,(3) b 为整数,(4) $a^2+b^2+c^2=84$.则 b 的值为______.

分析:由 $2b=a+c$ 入手,设 $a=b+d$,$c=b-d(d>0)$,则

$$(b+d)^2+b^2+(b-d)^2=84.$$

即 $3b^2+2d^2=84$.

显然,$2d^2$ 为 3 的倍数.又由 $b+c>a\Rightarrow b>2d$,代入(4)得 $2d^2<12$.故 $2d^2=3,6,9$.验证知 $b=5$.

例 13 在坐标平面上,横坐标和纵坐标均为整数的点称为整点.对任意自然数 n,连结原点 O 与 $A_n(n,n+3)$,用 $f(n)$ 表示线段 OA_n 上除端点外的整点个数.则

$f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,001)=$______.

(由 1990 年全国高中数学联赛题改编)

分析:易得 OA_n 的方程为

$$y=\frac{n+3}{n}x=x+\frac{3}{n}x\quad(0\leqslant x\leqslant n).$$

显然,整点时 n 必为 3 的倍数.设 $n=3k$,则

$y=\frac{k+1}{k}x$.

当 $x=k$ 及 $2k$ 时得整点 $(k,k+1)$，$(2k,2(k+1))$.

故 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,001)=1\,334$.

8 合理构造

构造函数、构造方程、构造图形等是求解数学竞赛题的常用手段.通过合理构造常可使问题巧妙解决.

例 14 设 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，其中 a、b、c、d 是常数.如果 $f(1)=10$，$f(2)=20$，$f(3)=30$，则 $f(10)+f(-6)=$______.

(1998，广东省中山市数学竞赛)

分析：依据 $f(1)=10$，$f(2)=20$，$f(3)=30$ 构造

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-t)+10x$.

故 $f(10)+f(-6)=9\times8\times7(10-t)+10\times10+[(-7)\times(-8)\times(-9)(-6-t)-60]=8\,104$.

例 15 函数 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2-6x+13}-\sqrt{x^4-x^2+1}$ 的最大值为______.

(1992，全国高中数学联赛)

分析：$f(x)=\sqrt{(x-3)^2+(x^2-2)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(x^2-1)^2}$ 可构造为：动点 (x,x^2) 到两定点 $(3,2)$、$(0,1)$ 的距离之差.由于动点 (x,x^2) 的轨迹为抛物线 $y=x^2$，作图易得最大值为 $\sqrt{10}$.

还可以构造为

$$
\begin{aligned}
&|(x-3)+(x^2-2)i|-|x+(x^2-1)i|\\
&=|(3-x)+(2-x^2)i|-|x+(x^2-1)i|\\
&\leqslant|(3-x)+x+[(2-x^2)+(x^2-1)]i|\\
&=\sqrt{10}.
\end{aligned}
$$

9 分类讨论

当遇到的问题较为复杂又确实隐含着划分因素时，可以实施分类讨论.

例 16 若 $\lambda>0$ 对于任意非负实数 x_1、x_2 都有 $x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\geqslant c(x_1+x_2)^2$，则最大的常数 $c=c(\lambda)=$______.

分析：(1)当 $\lambda\geqslant2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\\
&\geqslant x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1+x_2)^2,
\end{aligned}
$$

当 $x_1=x_2=0$ 时等号成立.

(2)当 $0<\lambda<2$ 时，

$$
\begin{aligned}
&x_1^2+x_2^2+\lambda x_1x_2\\
&=(x_1+x_2)^2-(2-\lambda)x_1x_2\\
&\geqslant(x_1+x_2)^2-(2-\lambda)\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\\
&=\frac{2+\lambda}{4}(x_1+x_2)^2,
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x_1=x_2$ 时等号成立.

由(1)、(2)知

$$
c(\lambda)=\begin{cases}1 & (\lambda\geqslant2),\\ \frac{2+\lambda}{4} & (0<\lambda<2).\end{cases}
$$

例 17 $\triangle ABC$ 的 3 个内角以弧度度量.设 $M=A\cos B+\sin A\cdot\cos C$，则(　　).

(A) $M>0$

(B)当 $\angle B\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$M>0$；

当 $\angle B>\frac{\pi}{2}$ 时，$M<0$

(C)当 $\angle C\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$M>0$；

当 $\angle C>\frac{\pi}{2}$ 时，$M<0$

(D)不同于 A、B、C 的结论

分析：(1) $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，$M>0$；

(2) $\triangle ABC$ 为直角三角形时，$M>0$；

(3) $\triangle ABC$ 为钝角三角形时，

(i)若 $\angle A>\frac{\pi}{2}$，$M>0$；

(ii)若 $\angle B>\frac{\pi}{2}$，

$$
\begin{aligned}
M&=A(-\cos A\cdot\cos C+\sin A\cdot\sin C)+\sin A\cdot\cos C\\
&=\cos A\cdot\cos C(\tan A-A)+A\sin A\cdot\sin C\\
&>0;
\end{aligned}
$$

(iii)若 $\angle C>\frac{\pi}{2}$，

$M = A\cos B - \sin A \cdot \cos(A+B)$

$= \cos B(A - \sin A \cdot \cos A) + \sin^2 A \cdot \sin B$,

由于 $A > \sin A$,因此,$M > 0$.

由(1)、(2)、(3)知应选(A).

10 引入特殊记号

有些问题的运算或推理有一定的规律性,若按常规计算不仅麻烦,且易出错.若适时地引入特殊记号,充分运用规律,结论会快速产生.

例18 在自然数集上定义的函数

$$f(n)=\begin{cases} n-3 & (n \geqslant 1\,000), \\ f[f(n+7)] & (n<1\,000). \end{cases}$$

则 $f(90)$ 的值为( ).

(A)997 (B)998 (C)999 (D)1 000

分析:记 $f^{(n)}(x) = f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}$($n$ 次迭代),则

$f(90) = f^{(2)}(97) = f^{(3)}(104) = \cdots$

$= f^{(131)}(1\,000)$.

由于 $f^{(n+4)}(1\,000) = f^{(n+3)}(997)$

$= f^{(n+2)}(998) = f^{(n+1)}(999) = f^{(n)}(1\,000)$,

所以 $f^{(n)}(1\,000)$ 的周期为4.

$f^{(131)}(1\,000) = f^{(4\times 32+3)}(1\,000)$

$= f^{(3)}(1\,000) = f^{(2)}(997) = f(998) = 999$.

因此,应选(C).

例19 设 $f(x) = |1-2x|$,$x \in [0,1]$.那么,方程 $f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{2}x$ 的解的个数为______.

分析:设 $y = f(x)$,$z = f(y)$,$w = f(z)$,用"→"表示变化情况,有

$x: 0 \to 1$,$y: 1 \to 0 \to 1$,

$z: 1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1$,

$w: 1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 0 \to 1$.

因为"→"的变化是线性的,且是在非负实数范围内变化,故 $w = f\{f[f(x)]\}$ 的图像与 $w = \frac{x}{2}$ 交点个数为8,即解的个数为8.

练 习 题

1.若 a、b、$c \in \mathbf{R}$,且 $4a - 4b + c > 0$,$a + 2b + c < 0$,则下列选项中正确的是( ).

(A)$b^2 \leqslant ac$ (B)$b^2 > ac$

(C)$b^2 > ac$ 且 $a > 0$ (D)$b^2 > ac$ 且 $a < 0$

(提示:构造函数 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$.答案:(B).)

2.若实数 x、y 满足 $x^2 - 2xy + y^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + 12 = 0$,则 xy 的最小值为( ).

(A)12 (B)$\frac{45}{16}$ (C)$\frac{21}{4}$ (D)$4\sqrt{3}$

(提示:条件为 x、y 的轮换对称式,预测 $x = y$ 时有最小值12.)

3.若实数 x、y 满足 $4x + 3y - 2x\left[\frac{x^2+y^2}{x^2}\right] = 0$,则 $\frac{y}{x}$ 的值为______($[x]$ 表示不超过 x 的最大整数).

(提示:令 $\frac{3y}{2x} = t$,则条件即为 $1 + t = \left[\frac{y^2}{x^2}\right]$,则 $1 + t = \left[\frac{4t^2}{9}\right] \Rightarrow 1 + t \leqslant \frac{4t^2}{9} \leqslant t + 2$.得 $t = -1$ 或 $t = 3$.故 $\frac{y}{x} = -\frac{2}{3}$ 或2.)

4.在直角坐标平面内的一点到三直线 $x = 0$,$y = 0$,$4x + 3y = 12$ 距离的平方和的最小值为______.

(提示:$x^2 + y^2 + \left(\frac{4x+3y-12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[x^2 + y^2 + \left(\frac{4x+3y-12}{5}\right)^2\right] \times \left[\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 + 1\right] \geqslant \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{12}{5}\right)^2 = \frac{72}{25}$.)

5.平面上整点(纵、横坐标都是整数的点)到直线 $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{5}$ 的距离中的最小值是( ).

(A)$\frac{\sqrt{34}}{170}$ (B)$\frac{\sqrt{34}}{85}$ (C)$\frac{1}{20}$ (D)$\frac{1}{30}$

(2000,全国高中数学联赛)

(提示:点到线的距离可转化为 $\frac{\sqrt{34}}{170}|25x - 15y + 12|$.因 x、$y \in \mathbf{Z}$,则 $|25x - 15y + 12|$ 必为整数.而其最小值为2.故选(B).)

6.黑板上写着1 000,1 001,1 002,…,2 999这2 000个数,每次允许擦去两个数 a、b($a \leqslant b$)并写上 $\frac{a}{2}$,如此1 999次以后得到一个数,则这个数必( ).

(A)为奇数 (B)为偶数 (C)小于1

(D)介于两个连续正整数之间

(提示:考察最后一个数的倒数,为此考察2 000个数逐渐减少时倒数和的变化,易知(C).)