中学数学教学参考
2003年第5期

○数学竞赛初级讲座○

数学竞赛中的“三个二次”问题

广东省中山市小榄中学 许少华
广东省中山市实验高中 马荣林

(本讲适合高中)

一元二次方程、一元二次不等式与二次函数简称“三个二次”,它们互相联系、互相渗透组成了一个特殊的“知识板块”,这个“知识板块”的内容异常丰富,技能、技巧变化多端.因此它成了高考命题的难点,也是近年数学竞赛命题的热点.

1 基础知识

1.1 二次函数的单调性,闭区间上的最值与图象对称轴位置的关系.

1.2 二次函数的几种特殊表示形式

1.2.1 顶点式:$f(x)=a(x-k)^2+h$.

1.2.2 零点式:$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

1.2.3 三点式:

$$f(x)=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1)+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_3)(x_2-x_3)}f(x_2)+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3).$$

1.3 求解“三个二次”的常见方法:构造函数、变量分离、数形结合、巧用特殊值及基本不等式等.

例1 设 $n\geqslant 2$ 且 $n\in\mathbf{N}$, $x_i\in[0,2]$ $(i=1,2,\cdots n)$,试证:二次函数 $f(x)=nx^2-2(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)x+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$ 的最小值不超过 n.

导析:引导学生利用特殊值.

$\because f(x)=(x-x_1)^2+(x-x_2)^2+\cdots+(x-x_n)^2$, $\because x\in[0,2]$, $\therefore (1-x_i)^2\leqslant 1\Rightarrow f(1)\leqslant n$,由于 $f_{\min}(x)\leqslant f(1)$,故 $f_{\min}(x)\leqslant n$.

例2 若函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{13}{2}$ 在 $[a,b]$ 上的最小值为 $2a$,最大值为 $2b$,求 $[a,b]$.(2000年全国联赛题)

导析:引导学生从对称轴入手分析.

(1)若 $b>a\geqslant 0\Rightarrow\begin{cases}f(a)=2b,\\f(b)=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=3.\end{cases}$

(2)若 $a<b\leqslant 0\Rightarrow\begin{cases}f(a)=2a,\\f(b)=2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\pm\sqrt{17},\\b=-2\pm\sqrt{17},\end{cases}$ 满足条件的 a,b 不存在.

(3)若 $a<0<b\Rightarrow\begin{cases}2b=\frac{13}{2},\\f(a)=2a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2b=\frac{13}{2},\\f(b)=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2-\sqrt{17},\\b=\frac{13}{4}.\end{cases}$

故 $[a,b]$ 为 $[1,3]$ 或 $[-2-\sqrt{17},\frac{13}{4}]$.

例3 若 $f(x)=-ax^2+bx+c$ $(a,b,c\in\mathbf{R})$ 在区间 $[0,1]$ 上恒有 $|f(x)|\leqslant 1$.

(1)对所有这样的 $f(x)$,求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值.

(2)试给出一个这样的 $f(x)$,使 $|a|+|b|+|c|$ 确定取到上述最值.(第九届希望杯数学竞赛题)

导析:引导学生利用二次函数的表示形式.

(1)由三点式令 $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1}{2}$ 得 $f(x)=[2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2})]x^2+[4f(\frac{1}{2})-f(1)-3f(0)]x+f(0)$.

$\therefore |a|+|b|+|c|=|2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2})|+|4f(\frac{1}{2})-f(1)-3f(0)|+|f(0)|\leqslant 3|f(1)|+8|f(\frac{1}{2})|+6|f(0)|\leqslant 17$.

(2)此时 $f(1)=f(0)=1$, $f(\frac{1}{2})=-1$ 或 $f(1)=f(0)=-1$, $f(\frac{1}{2})=1$,得 $f(x)=8x^2-8x+1$ 或 $f(x)=-8x^2+8x-1$.

2 综合应用

例4 设二次函数 $f(x)=-ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathrm{R}$ 且 $a\neq 0)$ 满足条件

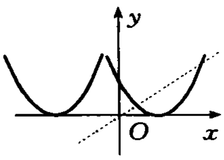
(1)当 $x\in\mathrm{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$ 且 $f(x)\geqslant x$；(2)$x\in(0,2)$ 时，$f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$；(3)$f(x)$ 在 R 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$ 使得存在 $t\in\mathrm{R}$，只要 $x\in[0,m]$ 就有 $f(x+t)\leqslant x$.(2002年全国联赛题)

导析：引导学生首先探索 $f(x)$ 的解析式，然后利用数形结合求解.

由 $f(x-4)=f(2-x)$ 得对称轴方程为 $x=-1$，又由③知 $f(x)=a(x+1)^2$.

再由 $x\leqslant f(x)\leqslant(\frac{x+1}{2})^2$，令 $x=1$ 得 $f(1)=1$，



因此 $a=\frac{1}{4}$，

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2$.

由于 $f(x+t)$ 的图象是由 $f(x)$ 的图象向左(或向右)平移 $|t|$ 个单位，欲使存在 t 使 $x\in[0,m]$ 时，有 $f(x+t)\leqslant x$，则必须向右移且 1 和 m 分别是方程 $f(x+t)=x$ 的两根；

即 $\frac{1}{4}(x+t+1)^2=x$ 的两根分别为 1 和 m，得 $t=-4,m=9$.

例5 求实数 a 的取值范围，使得对任意实数 x 和任意实 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，恒有 $(x+3+2\sin\theta\cos\theta)^2+(x+a\sin\theta+a\cos\theta)^2\geqslant\frac{1}{8}$.(1996年全国联赛题)

导析：引导学生利用不等式进行转化，然后再分离变量，结合最值进行求解.

设 $t=\sin\theta+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，则不等式转化为 $(x+2+t^2)^2+(x+at)^2\geqslant\frac{1}{8}$，

$\because (x+2+t^2)^2+(x+at)^2\geqslant 2(\frac{x+2+t^2-x-at}{2})^2=\frac{(t^2-at+2)^2}{2}$，欲使结论恒成立，只须 $\frac{(t^2-at+2)^2}{2}\geqslant\frac{1}{8}\Rightarrow 2t^2-2at+3\geqslant 0$ 或 $2t^2-2at+5\leqslant 0\Rightarrow a\leqslant t+\frac{3}{2t}$ 或 $a\geqslant t+\frac{5}{2t}$.

$\because 1\leqslant t\leqslant\sqrt{2}\Rightarrow(t+\frac{3}{2t})_{\min}=\sqrt{6},(t+\frac{5}{2t})_{\max}=\frac{7}{2}$，

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\sqrt{6}]\cup[\frac{7}{2},+\infty)$.

例6 已知 $f(x)=ax^2+b(a,b\in\mathrm{R})$，$A=\{x|f(x)=x\}$，$B=\{x|f[f(x)]=x\}$ 且 $A\neq B\neq\varnothing$，求 a^2+b^2 的取值范围.

导析：首先引导学生证明 $A\subseteq B$，然后利用方程有解再结合不等式进行求解. 证 $A\subseteq B$ 略.

$\because A\neq\varnothing$，$\therefore f(x)=x$，即方程 $ax^2+b=x$ 有实根，得 $ab\leqslant\frac{1}{4}$，

又 $B\neq\varnothing$，$\therefore$ 方程 $f[f(x)]=x$，即 $a(ax^2+b)^2+b=x$ 有实根，由于 $A\subseteq B$，因此，方程可转化为 $(ax^2-x+b)(a^2x^2+ax+ab+1)=0$.

由于 $A\neq B$，对于方程 $ax^2-x+b=0$， ①

与方程 $a^2x^2+ax+ab+1=0$， ②

方程①的解集不是方程②解集的子集；

由 $a^2-4a^2(ab+1)\geqslant 0\Rightarrow ab\leqslant-\frac{3}{4}$，当 $ab=-\frac{3}{4}$ 时，方程①的解 $x=-\frac{1}{2a}$ 也是方程②解，$\therefore ab\neq-\frac{3}{4}$.

由 $ab<-\frac{3}{4}\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2|ab|>\frac{3}{2}$，

故 $a^2+b^2\in(\frac{3}{2},+\infty)$.

例7 设函数 $f(x)=ax^2+8x+3(a<0)$，对于给定的负数 a 有一个最大的正数 $l(a)$，使得在整个区间 $[0,l(a)]$ 上，不等式 $|f(x)|<5$ 都成立.

问：a 为何值时 $l(a)$ 最大？并求出这个最大的 $l(a)$，证明你的结论.(1998年全国联赛题)

导析1：引导学生从函数最值入手分析.

由 $f(x)=a(x+\frac{4}{a})^2+3-\frac{16}{a}$.

(i)若 $3-\frac{16}{a}>5$，即 $-8<a<0$ 时，$l(a)$ 为方程 $f(x)=5$ 的较小根，由 $ax^2+8x+3=5$ 得

$l(a)=\frac{-4+\sqrt{16+2a}}{a}=\frac{2}{4+\sqrt{16+2a}}<\frac{1}{2}$.

(ii)若 $3-\frac{16}{a}\leqslant 5$，即 $a\leqslant-8$ 时，$l(a)$ 为方程 $f(x)=-5$ 的较大根，由 $ax^2+8x+3=-5$ 得 $l(a)=\frac{-4-2\sqrt{4-2a}}{a}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}\leqslant\frac{4}{\sqrt{20}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$，此时，$a=-8$.

因此，$a=-8$ 时，$l(a)$ 最大值为 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

导析2:引导学生从不等式入手

由$|f(x)|<5\Rightarrow\begin{cases}f(x)\leqslant 5,\\ f(x)\geqslant -5\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}ax^2+8x-2\leqslant 0,\\ ax^2+8x+8\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+\frac{8}{a}x-\frac{2}{a}\geqslant 0,\\ x^2+\frac{8}{a}x+\frac{8}{a}\leqslant 0.\end{cases}$

由第二个式子得

$-\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}\leqslant x\leqslant -\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}$, ①

对于第一个式子,由$\Delta=(\frac{8}{a})^2-4(-\frac{2}{a})$.

(i)若$\Delta\leqslant 0$,即$a\leqslant -8$时,

$l(a)=-\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}=\frac{4}{\sqrt{4-2a}-2}$

$\leqslant\frac{4}{\sqrt{4-2\times(-8)}-2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$;

(ii)若$\Delta>0$,即$-8<a<0$时,得

$x\geqslant -\frac{4}{a}+\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}$或$x\leqslant -\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}$

与①求交集,且得到从0开始的非负连续区间,只有

$0\leqslant x\leqslant -\frac{4}{a}-\sqrt{\frac{16-8a}{a^2}}<\frac{1}{2}$,

因此,$a=-8$时,$l(a)$最大值为$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

3 强化训练

(1)设$f(x)=ax^2+bx$,且$1\leqslant f(1)\leqslant 2$,$2\leqslant f(-1)\leqslant 4$,求$f(-2)$的范围.

(2)设$a\in\mathbf{R}$,函数$f(x)=ax^2+x-a(-1\leqslant x\leqslant 1)$,若$|a|\leqslant 1$,求证:$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}$.

(3)设$f(x)=x^2-x+c$,且$|x|\leqslant 1$时,$|f(x)|\leqslant 1$,若$x_1,x_2\in[0,1]$,试证:$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}$.

(4)已知$f(x)=ax^2+bx+c$,当$x\in[0,1]$时,$|f(x)|\leqslant 1$,求证:适合不等式$b\leqslant A$的最小实数A的值是8.

(5)若方程$f(x)=x^2+ax+b=0$的两实根均为非整数,试探求a,b满足什么条件时,一定存在整数n,使$|f(n)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

(6)已知$f(x)=ax^2+bx+c(a>b>c)$的图象上两点$(m_1,f(m_1))$,$(m_2,f(m_2))$满足:$f(1)=0$,且$a^2+[f(m_1)+f(m_2)]a+f(m_1)f(m_2)=0$.

(i)求证$b\geqslant 0$;

(ii)问能否保证$f(m_i+3)$中至少有一个是正数,请证明你的结论.

参考答案与提示

(1)$5\leqslant f(-2)\leqslant 10$.

(2)$|f(x)|=|(x^2-1)a+x|\leqslant|x^2-1|\cdot|a|+|x|\leqslant|x^2-1|+|x|=1-x^2+|x|=-(|x|-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}$.

(3)$\because |f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|\cdot|x_1+x_2-1|\leqslant|x_1-x_2|$,又$f(1)=f(0)$,不妨设$x_1<x_2$.

(i)若$x_2-x_1\leqslant\frac{1}{2}$,则$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|\leqslant\frac{1}{2}$.

(ii)若$x_2-x_1>\frac{1}{2}$,则

$|f(x_1)-f(0)+f(1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(0)|+|f(1)-f(x_2)|\leqslant x_1+1-x_2<\frac{1}{2}$.

(4)由三点式得$f(x)=[2f(1)+2f(0)-4f(\frac{1}{2})]x^2+[4f(\frac{1}{2})-f(1)-3f(0)]x+f(0)$,

比较和得$b=4f(\frac{1}{2})-f(1)-3f(0)$

$\leqslant 4|f(\frac{1}{2})|+|f(1)|+3|f(0)|\leqslant 8$.

(5)当$4a^2-16b\leqslant 1$时,一定存在整数n,使$|f(n)|\leqslant\frac{1}{4}$成立.

(6)(i)易得$a=-f(m_1)$或$a=-f(m_2)$,即m_1、m_2是方程$ax^2+bx+c=-a$的两根,

$\therefore b^2-4a(c+a)\geqslant 0$,结合$f(1)=0$得$b(3a-c)\geqslant 0$.又$\because a>b>c$,$\therefore a>0,c<0$.$\therefore b\geqslant 0$.

(ii)由$\begin{cases}a>b>c,\\ a+b+c=0\end{cases}\Rightarrow -2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$,$\because f(x)=a(x-1)(x-\frac{c}{a})$,由$f(m_1)=-a$或$f(m_2)=-a$,不妨令$f(m_1)=-a$,得$a(x-1)(x-\frac{c}{a})=-a<0\Rightarrow\frac{c}{a}<m_1<1\Rightarrow m_1+3>1$,

又$\because f(x)$在$(1,+\infty)$上递增,

$\therefore f(m_1+3)>f(1)>0$.

故结论成立.