中学数学教学参考
2002年第11期

数列中的不等问题

广东省中山市小榄中学　许少华

(本讲适合高中)

数列是中学数学的重要内容,不等问题的求解是中学数学的难点所在,两者结合产生的问题,具有抽象程度高、求解灵活性大的特点.在解法上没有固定模式可套,且对解题者的数学技能及创新意识的考查具有独到之处.因而,它成了数学高考复习的难点和竞赛命题的热点.

1　基础知识

1.1　递推数列:一个数列连续几项之间的关系为递推式,由前几项及递推式所确定的数列叫递推数列.等差、等比数列是两类特殊的递推数列.

1.2　两个恒等式

(1)$a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}$;

(2)$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$.

1.3　基本不等式及求解数列问题与不等式问题常用的方法与技能.

例1　设 $S_n=1+2+\cdots+n$, $n\in\mathrm{N}$, 求 $f(n)=\frac{S_n}{(n+32)S_{n+1}}$ 的最大值.　　(2000年全国联赛题)

导析:此题为基本问题,可引导学生先求出 S_n、S_{n+1},再用基本不等式.

由 $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$,得 $f(n)=\frac{n}{(n+32)(n+2)}=\frac{1}{n+\frac{64}{n}+34}\leqslant\frac{1}{50}$,当且仅当 $n=8$ 时等号成立.

例2　数列$\{a_n\}$为非负实数列,且满足 $a_k-2a_{k+1}+a_{k+2}\geqslant0$, $a_1+a_2+\cdots+a_n\leqslant1$, $k=1,2,\cdots$. 求证: $a_k-a_{k+1}<\frac{2}{k^2}(k=1,2,\cdots)$.

导析:引导学生通过引入新数列进行代换促使问题获解.

令 $b_k=a_k-a_{k+1}$ 由已知得 $b_k\geqslant b_{k+1}$.

由 $1\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_k=b_1+2b_2+\cdots+kb_k+a_{k+1}\geqslant b_1+2b_2+\cdots+kb_k\geqslant(1+2+\cdots+k)b_k$ $\Rightarrow b_k\leqslant\frac{2}{k(k+1)}<\frac{2}{k^2}$.

例3　数列$\{x_n\}$满足 $x_1=a>3$,且 $x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}$, $n\in\mathrm{N}$. 试证:当 $n\geqslant\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 时, $x_n<3$.

导析:先引导学生证明若 $x_k>3$ 时, $\frac{x_{k+1}}{x_k}<\frac{3}{4}$,然后结合恒等式①利用反证法.

由 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{x_n}{2(x_n-1)}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_n-1})$,可得当 $x_k>3$ 时, $\frac{x_{k+1}}{x_k}<\frac{3}{4}<1$,即 $x_k>x_{k+1}$.

假设 $a>3$,当 $n\geqslant\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 时,有 $x_{n+1}\geqslant3$,由 $x_1>$

点的直角三角形共有______个.

(2000年江苏省初中数学竞赛试题)

(5)平面上有1998个点,若从中任取三个点都能构一个角,试求这1998个点最多能构成多少个角?

(6)平面上有四个点,如果其中所有两点间的距离只取两个不同的值,那么称这四个点及其任意两点的连线所构成的图形为四个点的祖冲之图形.请你画出4~6个形状不同的四点的祖冲之图形(只需画出示意图及简要的文字说明,不要求证明).

(第五届祖冲之杯初中数学邀请赛试题)

参考答案

(1)D.画图确定.

(2)C.仿例2.

(3)16条.分类计数.

(4)6个、44个.按边长分别为1、$\sqrt{2}$、2分三类构成正方形;分四类构成直角三角形.

(5)$\frac{1997^3-1997}{2}$.用归纳法.

(6)①正方形;②两对角为60°的菱形;③正三角形与它的中心;④正△ABC及其外一点D,其中A、D在BC的两侧,且AD=AB,BD=DC;⑤正△ABC及其外一点E,其中A、E在BC的同侧,且AE=AB,BE=CE;⑥截正五边形的一角所得的等腰梯形.

$x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}\geqslant 3$ 及 $x_1=a$，得 $3\leqslant x_{n+1}=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\cdot\frac{x_{n+1}}{x_n}<a(\frac{3}{4})^n\Rightarrow n<\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$，与已知矛盾.

2 综合应用

例4 给定正整数 n 和 M，对于满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,\cdots a_n,\cdots$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

（1999年全国联赛题）

导析：引导学生抓住变量与常量.

设公差为 d，则 $nd=a_{n+1}-a_1$，$S=(n+1)a_{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}d=(n+1)(\frac{3}{2}a_{n+1}-\frac{1}{2}a_1)$.

思路1. 由柯西不等式，得 $S\leqslant(n+1)\sqrt{[(\frac{3}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2]\cdot(a_{n+1}^2+a_1^2)}\leqslant\frac{\sqrt{10M}}{2}(n+1)$，当且仅当 $\frac{a_{n+1}}{\frac{3}{2}}=\frac{a_1}{-\frac{1}{2}}$ 即 $a_{n+1}=-3a_1$ 时取得最大值.

思路2. 由 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$，设 $|a_1|\leqslant\sqrt{M}\cos\theta$，$|a_{n+1}|\leqslant\sqrt{M}\sin\theta$，则

$S\leqslant(n+1)(\frac{3}{2}|a_{n+1}|+\frac{1}{2}|a_1|)\leqslant(n+1)(\frac{3}{2}\cdot\sqrt{M}\sin\theta+\frac{1}{2}\sqrt{M}\cos\theta)\leqslant\frac{\sqrt{10M}}{2}(n+1)$，当且仅当 $\cos\theta=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，即 $a_1=-\frac{\sqrt{10M}}{10}$，$a_{n+1}=\frac{3\sqrt{10M}}{10}$ 时取得最大值.

例5 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}^2$，求证：$\frac{n+1}{n+2}<a_n<n$.

导析：引导学生对不等式进行适当的放缩，再结合恒等式(2).

易得 $a_n>a_{n-1}>0$，又 $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}a_{n-1}^2<a_{n-1}+\frac{1}{n^2}a_na_{n-1}\Rightarrow\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}<\frac{1}{n^2}$，∴ $\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_n}=(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1})+\cdots+(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n})<1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}\Rightarrow a_n<n$.

又∵ $a_{n-1}<n-1$，∴ $a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}a_{n-1}^2<a_{n-1}+\frac{n-1}{n^2}a_{n-1}\Rightarrow a_{n-1}>\frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$. ∴ $a_n>a_{n-1}+\frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}\cdot\frac{n^2}{n^2+n-1}a_n\Rightarrow\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}>\frac{1}{n^2+n-1}>\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. ∴ $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}=(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2})+\cdots+(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n})>(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$. ∵ $a_1=\frac{3}{4}$，∴ $\frac{1}{a_n}<\frac{5}{6}+\frac{1}{n+1}<\frac{n+2}{n+1}$，于是结论成立.

例6 设正数 $a_0,a_1,\cdots,a_{2003}$ 构成数列 $\{a_n\}$，且满足下列两个条件：(1) $a_0=a_{2003}$；(2) $a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}=2a_n+\frac{1}{a_n}$. 求所有满足条件的数列中 a_0 的最大值.

导析：引导学生在递推公式的基础上建立 a_{n-1} 与 a_n 的进一步的关系，由 $a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}=2a_n+\frac{1}{a_n}$

$\Rightarrow a_{n-1}=2a_n$， ①

或 $a_{n-1}=\frac{1}{a_n}$. ②

若 a_0 到 a_{2003} 用了①式 t 次，用了②式 $2003-t$ 次，则 $a_{2003}=a_0^{(-1)^t}\cdot 2^s$，其中 $|s|\leqslant 2003$，且 $|s|$ 与 $2003-t$ 具有相同的奇偶性.

(i)若 t 为奇数，则 s 为偶数，得 $a_0\leqslant 2^{1001}$；

(ii)若 t 为偶数，则 s 为奇数，此时 a_0 不存在.

故 a_0 的最大值为 2^{1001}.

例7 无穷正数列 $\{x_n\}$ 具有以下性质：$x_0=1$，$x_{i+1}\leqslant x_i(i=0,1,2,\cdots)$.

(1)试证：对具有上述性质的任一数列，总能找到一个 $n\geqslant 1$ 使 $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3.999$ 成立；

(2)寻求一个数列使不等式 $\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$ 对一切自然数 n 都成立.

导析：引导学生思考特殊数3.999；若左边的极限不小于4，则数 n 确实存在.

(1)由已知得 $\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant x_{n-1}$，$\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+x_{n-1}\geqslant 2x_{n-2}$，$\frac{x_{n-3}^2}{x_{n-2}}+\frac{x_{n-2}^2}{x_{n-1}}+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant\frac{x_{n-3}^2}{x_{n-2}}+2x_{n-2}\geqslant 2\sqrt{2}x_{n-3}=2^{1+\frac{1}{2}}x_{n-3}$，…，$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}}x_0$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{1+\frac{1}{2}+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-2}}=4$，故结论一定存在.

(2)考虑 $\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=q^{n-2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\cdots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n})=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{q(1-q)}$. 令 $q\in(0,1)$，得 $\frac{1}{q(1-q)}\leqslant 4\Rightarrow q=\frac{1}{2}$. 此时 $x_n=(\frac{1}{2})^n$.

例8 设 $x_n=\sqrt{2+\sqrt[3]{3+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$，试证：$x_{n+1}-x_n<\frac{1}{n!}$.

导析：引导学生构造数列，再进行适当放缩完成证明.

当 $n=2$ 时，$x_3-x_2=\sqrt{2+\sqrt[3]{3}}-\sqrt{2}<\frac{1}{2!}$

当 $n>2$ 时，构造数列 $\{a_i\}$、$\{b_i\}$、$\{c_i\}$，使

$a_i=\sqrt[i]{i+\sqrt[i+1]{(i+1)+\cdots+\sqrt[n]{n+\sqrt[n+1]{n+1}}}}$，

$b_i=\sqrt[i]{i+\sqrt[i+1]{(i+1)+\cdots+\sqrt[n]{n}}}$，$c_i=a_i^{i-1}+a_i^{i-2}b_i+\cdots+a_ib_i^{i-2}+b_i^{i-1}$.

显然 $x_{n+1}=a_2$，$x_n=b_2$，且 $(a_i-b_i)c_i=a_i^i-b_i^i=a_{i+1}-b_{i+1}\Rightarrow\frac{a_{i+1}-b_{i+1}}{a_i-b_i}=c_i$. 结合恒等式①$\Rightarrow a_2-b_2=\frac{a_{n+1}-b_{n+1}}{c_2\cdot c_3\cdot\cdots\cdot c_n}=\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{c_2\cdot c_3\cdot\cdots\cdot c_n}$.

又 $a_k>b_k\geqslant k^{\frac{1}{k}}\Rightarrow c_k\geqslant k\cdot k^{\frac{k-1}{k}}>k\cdot k^{\frac{k-1}{k+1}}\Rightarrow x_{n+1}-x_n=a_2-b_2<\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{n-1}{n+1}}}<\frac{1}{n!}$.

故结论成立.

3 强化训练

(1)如果 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in N)$，证明：$n\geqslant 2$ 时，$a_n^2\geqslant 2(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n})$.

(2)设 $a_0=2002$，对于任何非负整数 n 均有 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}$，求证：$2002-n$ 是小于等于 a_n 的最大整数.(其中 $1\leqslant n\leqslant 2002$)

(3)函数 $f(x)$ 的定义域为 R，对任意实数 x_1,x_2 $(x_1\neq x_2)$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<|x_1-x_2|$，且存在 $x_0\in R$，使 $f(x_0)=x_0$. 又数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1<x_0$，$f(a_n)=2a_{n+1}-a_n$，试证：

①$a_n<x_0$；②$a_n<a_{n+1}$.

(4)求最小的实数 c，使其具有如下性质：对每一正实数构成的数列 $\{x_n\}$，若 $x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant x_{n+1}$，则 $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\cdots+\sqrt{x_n}\leqslant c\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}$ 恒成立.

(5)数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$ 且 $a_{n+1}=\sqrt{a_n^2+\frac{1}{a_n}}$ $(n\geqslant 1)$，求证：对于所有的正整数 n 存在 α 使 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^\alpha}\leqslant 2$ 恒成立.

(6)设非负数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足条件 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m(m,n\in R)$，求证：对任意 $n\geqslant m$ 均有 $a_n\leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m$.

参考答案或提示

(1) $a_{n-1}=a_n-\frac{1}{n}\Rightarrow a_n^2-a_{n-1}^2=\frac{2a_n}{n}-\frac{1}{n^2}\Rightarrow a_n^2=1+2(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n})-(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})>1+2(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n})-[\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}]$.

(2)由 $a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n+1}-1<0\Rightarrow a_n=a_0-n+(\frac{1}{a_0+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1})>a_0-n$ 且 $a_{n+1}<a_n$.

若 $1\leqslant n\leqslant\frac{1}{2}(a_0+2)\Rightarrow\frac{1}{a_0+1}+\cdots+\frac{1}{a_n+1}<\frac{n}{a_{n-1}+1}<\frac{n}{a_0-n+2}<1$.

令 $a_0=2002$，$1\leqslant n\leqslant 2002$ 即得结论.

(3)①用数学归纳法. ②$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}\cdot[f(a_n)+a_n]=\frac{1}{2}[a_n-x_0+f(x_0)-f(a_n)]$，仿①即可.

(4) $c=\sqrt{2}+1$. 首先取 $x_n=2^n$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{x_1+\cdots+x_n}}=\sqrt{2}+1$，再用数归法证明.

(5) $\frac{1}{2}\leqslant\frac{a_n}{n^\alpha}\leqslant 2\Rightarrow\frac{n^{2\alpha}}{4}\leqslant a_n^2\leqslant 4n^{2\alpha}$ 及 $\frac{1}{2n^\alpha}\leqslant\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{2}{n^\alpha}$，于是 $\frac{n^{2\alpha}}{4}+\frac{1}{2n^\alpha}\leqslant a_{n+1}^2\leqslant 4n^{2\alpha}+\frac{2}{n^\alpha}$

$$\Rightarrow\begin{cases}4n^{2\alpha}+\frac{2}{n^\alpha}\leqslant 4(n+1)^{2\alpha},\\ \frac{(n+1)^{2\alpha}}{4}\leqslant\frac{n^{2\alpha}}{4}+\frac{1}{2n^\alpha}\end{cases}$$

$\Rightarrow\begin{cases}2n^{3\alpha}+1\leqslant 2(n+1)^{2\alpha}n^\alpha,\\ (n+1)^{2\alpha}n^\alpha\leqslant n^{3\alpha}+2.\end{cases}$ 观察、验证得 $\alpha=\frac{1}{3}$.

(6)由 $a_n\leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m\Rightarrow\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{m}{n}(\frac{a_1}{1}-\frac{a_m}{m})$.

当 $m=n$ 时，结论成立；

当 $n>m$ 时，$\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m}\leqslant\frac{a_{n-m}+a_m}{n}-\frac{a_m}{m}=\frac{n-m}{n}\cdot(\frac{a_{n-m}}{n-m}-\frac{a_m}{m})\leqslant\cdots\leqslant\frac{n-km}{n}(\frac{a_{n-km}}{n-km}-\frac{a_m}{m})$. 令 $s=n-km$，则 $1\leqslant s\leqslant m$，$k\geqslant\frac{m}{m+1}$，即得结论.

(本期"竞赛初级讲座"特邀编辑 刘康宁)