解题方法与技巧

构造对偶式证明不等式

528415 广东省中山市北大学园小榄中学 许少华

不等式的证明方法很多.这里介绍构造对偶式证明不等式,也许在诸多证明方法中它别开生面、独具"风味".给人一种赏心悦目的感觉.

1 "填充"对偶式

例1 求证:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

分析 不等式的左边是几个分数连乘积.能不能在每两个相邻的分数之间插入另一个分数?因此:

设 $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$,

$B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n+1}$,

由于 $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$,…,

$\frac{2n-1}{2n}<\frac{2n}{2n+1}$.

因此 $A<B$,从而

$$A^2<A\cdot B=\frac{1}{2n+1}\Rightarrow A<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

故原不等式成立.

例2 求证:$(1+1)(1+\frac{1}{4})\cdot\cdots\cdot(1+\frac{1}{3n-2})>\sqrt[3]{3n+1}$.

分析 左边 $=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$,可以发现相邻两分数之间可以插入两个分数,因此:设 $A=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$;

$B=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1}$;

$C=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n}$.

由于 $\frac{2}{1}>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}>\frac{6}{5}>\frac{7}{6}$,…,

$\frac{3n-1}{3n-2}>\frac{3n}{3n-1}>\frac{3n+1}{3n}$.

因此 $A^3>ABC$

$$=(\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n-2})(\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{3n}{3n-1})(\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{3n+1}{3n})$$

$=3n+1$.

$\therefore$ $A>\sqrt[3]{3n+1}$.

故原不等式成立.

2 "错位"对偶式

例3 若 α,β,γ 为锐角,且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.求证:$\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma\geqslant\frac{3}{2}$.

(《数学通报》问题839)

证明 设 $A=\cot^2\alpha+\cot^2\beta+\cot^2\gamma$

$$=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\gamma};$$

$$B=\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\gamma};$$

$$C=\frac{\cos^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\gamma}.$$

结合已知得 $B+C=3$,

$$A+B=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}+\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}\geqslant 3;$$

同理 $A+C\geqslant 3$.

那么 $2A+(B+C)\geqslant 6 \Rightarrow A\geqslant\frac{3}{2}$.

故原不等式成立.

例4 已知 $x,y,z\in\mathbf{R}_+$ 试证:

$$\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z}\geqslant 0.$$

(W. Janoux 猜想)

证明 设

$$A=\frac{y^2-x^2}{z+x}+\frac{z^2-y^2}{x+y}+\frac{x^2-z^2}{y+z},$$

$$B=\frac{z^2-y^2}{z+x}+\frac{x^2-z^2}{x+y}+\frac{y^2-x^2}{y+z},$$

则 $A+B=0$,

而 $A-B=(\frac{y^2-x^2}{z+x}-\frac{y^2-x^2}{y+z})+(\frac{z^2-y^2}{x+y}-\frac{z^2-y^2}{z+x})+(\frac{x^2-z^2}{y+z}-\frac{x^2-z^2}{x+y})$

$$=\frac{(y+x)(y-x)^2}{(z+x)(y+z)}+$$

$$\frac{(z+y)(z-y)^2}{(x+y)(z+x)}-\frac{(x+z)(x-z)^2}{(y+z)(x+y)}\geqslant 0,$$

所以 $A\geqslant 0$. 故原不等式成立.

3 "互倒"对偶式

例5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相等的正整数,求证:

$$a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

证明 设 $A=a_1+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{3^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$,

$$B=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},$$

则 $A+B=(a_1+\frac{1}{a_1})+(\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{a_2})+\cdots+(\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{a_n})\geqslant 2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})$.

因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为互不相等的正整数,所以 $B\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,因此

$$A\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

故原不等式成立.

例6 设 a,b,c 为正实数,且 $abc=1$,求证:$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}$.

(第36届IMO试题)

证明 设

$$A=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)},$$

$$B=\frac{a(b+c)}{4}+\frac{b(c+a)}{4}+\frac{c(a+b)}{4},$$

则

$$A+B=\left[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{a(b+c)}{4}\right]+\left[\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{b(c+a)}{4}\right]+\left[\frac{1}{c^3(a+b)}+\frac{c(a+b)}{4}\right]\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

又因为 $abc=1$,所以 $B=\frac{1}{4}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+\frac{1}{4}(\frac{1}{c}+\frac{1}{a})+\frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$.

因此 $A\geqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-B$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}.$$

故原不等式成立.

4 "和差"对偶式

例7 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,求证:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

证明 设 $s=a+b+c$,

$$A=\frac{a^2}{s-a}+\frac{b^2}{s-b}+\frac{c^2}{s-c},$$

$$B=\frac{s^2}{s-a}+\frac{s^2}{s-b}+\frac{s^2}{s-c},$$

则 $B-A=4s$.

由于

$$\frac{s^2}{s-a}+\frac{a^2}{s-a}=\frac{\frac{8}{9}s^2+\frac{1}{9}s^2+a^2}{s-a}\geqslant\frac{\frac{8}{9}s^2+\frac{2}{3}sa}{s-a}=\frac{14}{9}\cdot\frac{s^2}{s-a}-\frac{2}{3}s,$$

所以 $B+A\geqslant\frac{14}{9}B-2s$.

从而得 $(4s+A)+A\geqslant\frac{14}{9}(4s+A)-2s$

$$\Rightarrow A\geqslant\frac{s}{2}.$$

故原不等式成立.

例8 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}_+$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$,求证:

$$\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n}\geqslant\frac{1}{n-1}.$$

(《数学通报》问题845)

证明 设

$$A=\frac{x_1^2}{1-x_1}+\frac{x_2^2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n^2}{1-x_n},$$

$$B=\frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}+\cdots+\frac{1}{1-x_n},$$

则 $B-A=n+1$.

由于

$$\frac{1}{1-x_1}+\frac{x_1^2}{1-x_1}=\frac{\frac{n^2-1}{n^2}+(\frac{1}{n^2}+x_1^2)}{1-x_1}\geqslant\frac{\frac{n^2-1}{n^2}+\frac{2x_1}{n}}{1-x_1}=\frac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot\frac{1}{1-x_1}-\frac{2}{n},$$

所以 $B+A\geqslant\frac{n^2+2n-1}{n^2}\cdot B-2$.

因而得 $(n+1+A)+A\geqslant\frac{n^2+2n-1}{n^2}(n+1+A)-2$

$$\Rightarrow A\geqslant\frac{1}{n+1}.$$

故原不等式成立.

(收稿日期:20020204)