高考数列问题的五大热点

广东省中山市北大学园小榄中学 528415 许少华

数列是高中数学的重要内容,是初等数学通往高等数学的桥梁. 因此,无论是从有利于中学数学教学出发还是从有利于高校选拔人才出发,数列都是永不衰退地高考热点. 纵观近年高考试题,数列试题的分数年年都占二十分左右,且试题不落俗套,新花样层出不穷. 本文将以近年高考试题为例,分别阐述几类热点问题的求解,供参考.

热点之一:建立在基本概念的基础上,着重考查常规的运算技能与合理的运算能力.

例1 (2000年全国试题)(Ⅰ)已知数列$\{c_n\}$,其中$c_n=2^n+3^n$且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列,求常数p.

(Ⅱ)设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列,$c_n=a_n+b_n$,证明:数列$\{c_n\}$不是等比数列.

简解 (Ⅰ)$c_{n+1}-pc_n$

$=2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)$

$=2^n(2-p)+3^n(3-p)$,

由$[2^n(2-p)+3^n(3-p)]^2=[2^{n-1}(2-p)+3^{n-1}(3-p)]\cdot[2^{n+1}(2-p)+3^{n+1}(3-p)]$得:$(2-p)(3-p)\cdot 2^{n-1}3^{n-1}=0$.所以$p=2$或3.

(Ⅱ)设$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的公比分别为$p,q(p\neq q)$,则:$a_n=a_1p^{n-1},b_n=b_1q^{n-1}$,假设$\{c_n\}$为等比数列,则$c_2^2=c_1c_3$,即$(a_1p+b_1q)^2=(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)$.得:$(p-q)^2=0$.所以$p=q$与已知矛盾.

例2 (2000年广东试题)设$\{a_n\}$为等比数列,$T_n=na_1+(n-1)a_2+\Lambda+2a_{n-1}+a_n$,已知$T_1=1$,$T_2=4$.

(Ⅰ)求数列$\{a_n\}$的首项和公比;(Ⅱ)求数列$\{T_n\}$的通项公式.

简解 (Ⅰ)易得$a_1=1,q=2$.

(Ⅱ)由$T_n=n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\Lambda+2\cdot 2^{n-2}+1\cdot 2^{n-1}\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$ ①

得:$2T_n=n\cdot 2+(n-1)\cdot 2^2+\Lambda+2\cdot 2^{n-1}+1\cdot 2^n\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda$ ②

②减①得:$T_n=-n+2+2^2+\Lambda+2^{n-1}+2^n=2^{n+1}-n-2$.

评注:例1必须注重运算的合理性与规律性,否则,很难产生结论;例2是等差数列与等比数列对应项乘积构成的和,求解方法是错位相减,属于常规运算技能.

热点之二:以数列为载体,重在考查不等式的性质及常规的证明技巧.

例3 (2001年京、皖、蒙春季高考试题)在1与2之间插入n个正数$a_1,a_2,\Lambda\Lambda,a_n$,使这$n+2$个数成等比数列,又在1与2之间插入$n$个正数$b_1,b_2,\Lambda\Lambda,b_n$,使这$n+2$个数成等差数列,记$A_n=a_1\cdot a_2\cdot\Lambda\cdot a_n$,$B_n=b_1+b_2+\Lambda+b_n$.

(Ⅰ)求数列$\{A_n\}$,$\{B_n\}$的通项;(Ⅱ)当$n\geqslant 7$时,比较A_n,B_n的大小,并证明你的结论.

简解 (Ⅰ)设公比为q、公差为d,由已知得:$2=1\cdot q^{n+1}$,所以$q^{n+1}=2$,又$2=1+(n+1)d$,$A_n=2^{\frac{n}{2}}$,$B_n=\frac{3n}{2}$.

(Ⅱ)$n=7$时,$A_n^2=128$,$B_n^2=\frac{9}{4}\times 49$,此时$A_n^2>B_n^2$,猜想$n\geqslant 7$时,$A_n^2>B_n^2$;

下面用数学归纳法证明:

1°略;2°假设$n=k$时结论成立,即$A_k^2>B_k^2$也就是:$2^k>\frac{9}{4}k^2$.

当$n=k+1$时,$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2\cdot\frac{9}{4}k^2=\frac{9}{4}(k^2+k^2)>\frac{9}{4}(k^2+2k+1)=\frac{9}{4}(k+1)^2$.即当$n=k+1$时结论成立.

故时$A_n^2>B_n^2$,由此得:$n\geqslant 7$时$A_n>B_n$.

例4 (1998年全国高考题)已知数列$\{b_n\}$是等差数列,$b_1=1,b_1+b_2+\Lambda+b_{10}=145$,

(Ⅰ)求数列$\{b_n\}$的通项公式;(Ⅱ)设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})$(其中$a>0$且$a\neq 1$),记$S_n$为数列$\{a_n\}$的前$n$项和,试比较$S_n$与$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$的大小,并证明你的结论.

简解 (Ⅰ)易得$b_n=3n-2$.

(Ⅱ)$a_n=\log_a(1+\frac{1}{b_n})$,所以$S_n=a_1+a_2+\Lambda+a_n=\log_a[(1+1)(1+\frac{1}{4})\Lambda(1+\frac{1}{3n-2})]$,

又$\frac{1}{3}\log_a b_{n+1} = \log_a \sqrt[3]{3n+1}$.

$3k-1 = \frac{(3k-2+(3k-2)+(3k-1)}{3}$

$> \sqrt[3]{(3k-2)^2(3k+1)}$,

所以$\frac{3k-1}{3k-2} > \sqrt[3]{\frac{3k+1}{3k-2}}$.

因此$(1+1)(1+\frac{1}{4})\Lambda(1+\frac{1}{3n-2})$

$= \frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}\cdot\Lambda\cdot\frac{3n-1}{3n-2}$

$> \sqrt[3]{\frac{4}{1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{4}}\cdot\Lambda\cdot\sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$

$= \sqrt[3]{3n+1}$.

故(ⅰ)当$a>1$时,$S_n > \frac{1}{3}\log_a b_{n+1}$;(ⅱ)当$0 < a < 1$时,$S_n < \log_a b_{n+1}$.

评注:例 3、例 4 的共性是第一问都是较基础的数列问题;而第二问是难度较大的不等式问题,虽然都是比较大小,但方法截然不同:一个先归纳后论证,一个直接利用不等式的放缩技巧.

热点之三:利用数列知识的特点,设计探索题.重在考查考生的探索能力与创新能力.

例 5 (上海 2001 年春季高考题)已知数列$\{a_n\}$是首项为 2,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列,S_n为它的前n项和.

(Ⅰ)用S_n表示S_{n+1},(Ⅱ)是否存在自然数c,k使得:$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c} > 2$成立?

简解　(Ⅰ)易得$S_n = 4(1-\frac{1}{2^n})$,因此$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + 2$;

(Ⅱ)假设存在c,k使$\frac{S_{k+1}-c}{S_k-c} > 2$成立,则

$\frac{\frac{1}{2}S_k+2-c}{S_k-c} > 2 \Rightarrow \frac{c-(\frac{3}{2}S_k-2)}{c-S_k} < 0$,

$(\frac{3}{2}S_k-2)-S_k = \frac{1}{2}S_k - 2 < 0$,

所以$\frac{3}{2}S_k - 2 < c < S_k$.

$S_k > S_{k-1}$,所以$\frac{3}{2}S_k - 2 > \frac{3}{2}S_{k-1} - 2 > \Lambda > \frac{3}{2}S_1 - 2 = 1$,又$S_k < 4$,所以$c$只能取 2 或 3.

①当$c=2$时,得$2 < S_k < \frac{8}{3}$,又$S_k = 4(1-\frac{1}{2^k})$,所以$S_1 = 2$,$k \geqslant 2$时,$S_k \geqslant 4(1-\frac{1}{4}) = 3$显然均不符,故$c \neq 2$.

②当$c=3$时,得$3 < S_k < \frac{10}{3}$,又$S_1 = 2$,$S_2 = 3$,$k \geqslant 3$时,$S_k \geqslant 4(1-\frac{1}{8}) > \frac{10}{3}$显然均不符,故$c \neq 3$.

故这样的自然数不存在.

例 6　设数列$\{a_n\}$是由正数组成的等差数列,S_n为前n项和;

(Ⅰ)证明:$\frac{1}{2}(\lg S_n + \lg S_{n+2}) < \lg S_{n+1}$.

(Ⅱ)是否存在常数c使得:$\frac{1}{2}[\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)] = \lg(S_{n+1}-c)$成立?证明你的结论.

简解　(Ⅰ)$S_{n+1}^2 - S_nS_{n+2} = S_{n+1}(a_1+qS_n) - S_n(a_1+qS_{n+1}) = a_1(S_{n+1}-S_n) = a_1a_{n+1} > 0$易得结论,以下略.

(Ⅱ)若常数c存在,则$(S_n-c)(S_{n+2}-c) = (S_{n+1}-c)^2 \Rightarrow S_nS_{n+2}-S_{n+1}^2 = c(S_n+S_{n+2}-2S_{n+1}) = c[(S_n-c)+(S_{n+2}-c)-2(S_{n+1}-c)] \geqslant [2\sqrt{(S_n-c)(S_{n+2}-c)}-2(S_{n+1}-c)] = 0$与(Ⅰ)矛盾.

故常数c不存在.

评注:探索题是开放性试题的一种,在考查探索能力与创新能力方面具有特殊功能.常规的求解思路是:先假定存在,然后逆推使其与条件吻合或产生矛盾.

热点之四:将数列问题置身于其它章节内容之中,重在考查分析问题的能力与综合应用知识的能力.

例 7　已知二次函数$y=f(x)$在$x=\frac{t+2}{t}$处取得最小值$-\frac{t^2}{4}$,$(t>0)$,$f(1)=0$.

(Ⅰ)求函数$f(x)$的表达式;

(Ⅱ)若任意实数x都满足:$f(x)g(x)-a_nx+b_n = x^{n+1}$,($g(x)$为多项式,$n \in \mathbf{N}$)试用$t$表示$a_n$,$b_n$.

(Ⅲ)设圆C_n的方程为:$(x-a_n)^2+(y-b_n)^2 = r_n^2$,圆$C_n$与$C_{n+1}$外切($n=1,2\Lambda\Lambda$),$\{r_n\}$是各项都是正数的等比数列、记$S_n$为前$n$个圆的面积之和,求$r_n$,$S_n$.

简解　(Ⅰ)$f(x)=(x-1)(x-t-1)$.

(Ⅱ)由$f(x)g(x)-a_nx+b_n = x^{n+1}$,

得：$(x-1)(x-t-1)g(x)-a_nx+b_n=x^{n+1}$，

令 $x=1$，及 $x=t+1$ 得：

$$\begin{cases}a_n+b_n=1\\(t+1)a_n+b_n=(T+1)^{n+1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_n=\frac{1}{t}[(t+1)^{n+1}-1]\\b_n=\frac{t+1}{t}[1-(t+1)^n]\end{cases}$$

(Ⅲ)由 $C_n:(x-a_n)^2+(y-b_n)^2=r_n^2$ 与 $C_{n+1}:(x-a_{n+1})^2+(y-b_{n+1})^2=r_{n+1}^2$ 外切得：

$(a_{n+1}-a_n)^2+(b_{n+1}-b_n)^2=(r_n+r_{n+1})^2$

$\Rightarrow r_n+r_{n+1}=\sqrt{2}(t+1)^{n+1}$.

设 r_n 的公比为 q，则

$$\begin{cases}r_n+qr_n=\sqrt{2}(t+1)^{n+1}\\r_{n+1}+qr_{n+1}=\sqrt{2}(t+1)^{n+2}\end{cases}$$

$\Rightarrow q=1+t$，又 $r_1+qr_1=\sqrt{2}(t+1)^2$，

得：$r_1=\frac{\sqrt{2}(t+1)^2}{t+2}$，所以 $r_n=\frac{\sqrt{2}(t+1)^{n+1}}{t+2}$，

$$S_n=\pi(r_1^2+r_2^2+\Lambda+r_n^2)$$
$$=\frac{2\pi(t+1)^4}{t(t+1)^3}[(t+1)^{2n}-1].$$

例8 若 A_n 和 B_n 分别表示数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和，对任意正整数 n，$a_n=-\frac{2n+3}{2}$，$4B_n-12A_n=13n$.

(Ⅰ)求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；(Ⅱ)设有抛物线 $c_1,c_2,\Lambda,c_n,\Lambda$，抛物线 c_n 的对称轴平行于 y 轴，顶点为 (a_n,b_n) 且通过点 $D_n(0,n^2+1)$，并与抛物线 c_n 相切的直线斜率为 k_n，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_1+k_2+\Lambda+k_n}{a_n\cdot b_n}$ 的值.

(Ⅲ)设集合 $X=\{x\mid x=2a_n,n\in\mathbf{N}\}$，$Y=\{y\mid y=4b_n,n\in\mathbf{N}\}$，若等差数列 $\{c_n\}$ 的任一项 $c_n\in X\cap Y$，c_1 是 $X\cap Y$ 中的最大数，且 $-265<c_{10}<-125$，求 $\{c_n\}$ 的通项公式.

简解 (Ⅰ)易得 $b_n=-\frac{12n+5}{4}$.

(Ⅱ)设抛物线的方程为 $y-b_n=a(x-a_n)^2$，因过点 $D_n(0,n^2+1)$，$n^2+1-b_n=a\cdot a_n^2\Rightarrow n^2+1+\frac{12n+5}{4}=a(-\frac{2n+3}{3})^2\Rightarrow a=1$，所以抛物线的方程为：$y-b_n=x^2-2a_nx+a_n^2$.

因为过 $D_n(0,n^2+1)$ 的切线方程为：$\frac{y+n^2+1}{2}-b_n=0\cdot x-2a_n\cdot\frac{x+0}{2}+a_n^2\Rightarrow k_n=-2a_n+3$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k_1+k_2+\Lambda+k_n}{a_n\cdot b_n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(5+2n+3)n}{2}\cdot(-\frac{2}{2n+3})\cdot(-\frac{4}{12n+5})\right]$$
$$=\frac{1}{3}.$$

(Ⅲ)由 $X=\{x\mid x=2a_n,n\in\mathbf{N}\}$，$=\{x\mid x=-2n-3,n\in\mathbf{N}\}$，$Y=\{y\mid y=4b_n,n\in\mathbf{N}\}=\{y\mid y=-12n-5,n\in\mathbf{N}\}=\{y\mid y=-2(6n+1)-3,n\in\mathbf{N}\}$，显然 $Y\subset X$，所以 $c_1=-17$.

设 $\{c_n\}$ 的公差为 d，由 $-265<c_{10}<-125$

$\Rightarrow -265<-17+9d<-125$

$\Rightarrow -27\frac{5}{9}<d<-12$.

又 $\{4b_n\}$ 是以12为公差的等差数列，所以 $d=-12m$，$(m\in\mathbf{N})$，得：$d=-24$.

故 $c_n=7-24n$.

评注：由递推式、函数、二次曲线等结合产生的数列问题是综合性较强的问题，由于知识面广、信息量大，求解时要善于抓住特点：分析重要条件、考察特殊点的函数值、利用二次曲线的常规性质等，寻找解题的突破口.

热点之五：由于数列知识与社会联系密切，因此设计应用问题考查考生的建模能力与应用数学知识解决实际问题的能力.

例9 (2001年全国高考题)从社会效益和经济效益出发，某地投入资金进行生态环境建设，并以此发展旅游产业. 根据规划，本年度投入800万元，以后每年投入将比上一年减少 $\frac{1}{5}$. 本年度当地旅游业收入估计为400万元，由于该项建设对旅游业的促进作用，预计今后的旅游业收入每年会比上一年增加 $\frac{1}{4}$.

(Ⅰ)设 n 年内(本年度为第一年)总投入为 a_n 万元，旅游业总收入为 b_n 万元，写出 a_n、b_n；

(Ⅱ)至少经过几年，旅游业的总收入才能超过总投入？

简解 (Ⅰ)$a_n=800+800\times(1-\frac{1}{5})+\Lambda+800\times(1-\frac{1}{5})^{n-1}=4\,000\times[1-(\frac{4}{5})^n]$，

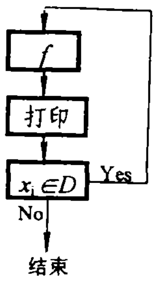
$b_n=400+400\times(1+\frac{1}{4})+\Lambda+400\times(1+\frac{1}{4})^{n-1}=1\,600\times[(\frac{4}{5})^n-1]$.

(Ⅱ)若至少经过 n 年旅游业收入才能超过总

投入,即 $b_n > a_n$ 得:$1\,600\times[(\frac{5}{4})^n-1] > 4\,000\times[1-(\frac{4}{5})^n] \Rightarrow (\frac{4}{5})^n < \frac{2}{5} \Rightarrow n > 4.1$.

故至少经过5年旅游业的总收人才能超过总投入.

例10 (2001年上海高考)对任意函数 $f(x)$,$x\in D$,可按图示构造一个数列发生器,其工作原理如下:



① 输入数据 $x_0\in D$,经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$;

② 若 $x_1\notin D$,则数列发生器结束工作;若 $x_1\in D$,则将 x_1 反馈回输入端,再输出 $x_2=f(x_1)$,并依此规律继续下去.

现定义 $f(x)=\frac{4x-2}{x+1}$,问:

(1) 若输入 $x_0=\frac{49}{65}$,则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$,请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项.

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数列,试求输入的初始数据 x_0 的值.

(3) 若输入 x_0 时,产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足:对任意正整数 n 均有 $x_n < x_{n+1}$,求 x_0 的取值范围.

简解 (1) 易得:数列 $\{x_n\}$ 为:$\frac{11}{19},\frac{1}{5},-1$.

(2) 由 $x_{n+1}=f(x_n)=\frac{4x_n-2}{x_n+1}$,若 $\{x_n\}$ 为常数列,则 $x_{n+1}=x_n$ 得:$x_n=1$ 或 $x_n=2$,若 $x_n=1$,$x_1=\frac{4x_0-2}{x_0+1}$ 得:$x_0=1$;若 $x_n=2$,$x_1=\frac{4x_0-2}{x_0+1}$ 得:$x_0=2$.

故 $\{x_n\}$ 为常数列时,输入的初始值 $x_0=1$ 或 2.

(2) 由 $x_2 > x_1$,即 $\frac{4x_1-2}{x_1+1} > x_1$.得:$x_1 < -1$ 或 $1 < x_1 < 2$.

若 $x_1 < -1$,由 $x_2=\frac{4x_1-2}{x_1+1}=4-\frac{6}{x_1+1} > 4$,得:$x_3=4-\frac{6}{x_2+1} < 4$,此时 $x_3 < x_2$ 不可能有:$x_{n+1} > x_n$.

若 $1 < x_1 < 2$,由 $x_2=4-\frac{6}{x_1+1}$ 得:$1 < x_2 < 2$ΛΛ 类似地 $1 < x_n < 2$;

由 $x_{n+1}-x_n=\frac{4x_n-2}{x_n+1}-x_n=\frac{(x_n-1)(2-x_n)}{x_n+1} > 0$.所以 $x_{n+1} > x_n$ 此时由 $1 < x_1 < 2$ 即 $1 < \frac{4x_0-2}{x_0+1} < 2$,得:$1 < x_0 < 2$.

故 $1 < x_0 < 2$ 时,$x_{n+1} > x_n$ 对任意正整数 n 都成立.

评注:银行存、贷问题;按揭买房、买车问题;生产的增长率问题等等,都是数列问题,又都是生活中的实际问题.对于这类问题,先抓住起始值,即数列的第一项;然后找规律(是等差问题还是等比问题?公差或公比是多少?;再看年限,即数列的项数;再进行求.而例10是数列型的信息迁移问题,求解的灵活性较大,不仅仅要用到数列知识,更重要的是随机应变的能力.

(上接第39页)

物质准备:准考证,双笔(铅笔、钢笔)、橡皮、尺规不可少.

3.3 考前十分钟:

一查,查对试卷页数,正、反面有无异常(漏印、空缺);

二写,正确写姓名,准考证号,学校名称等:

三审,动脑审析头几道客观性试题,但不动笔纸答.

(严格遵守考试规则,可尝试先写在草纸上)

3.4 考场两小时:

① 应考谱:审题不误解题"时"(时间)(关键词上多推敲)

顺藤摸瓜找思路(Ⅰ卷Ⅱ卷,从易到难解)

书写规范勿失分(一笔一划老实写),

不乱不跳少涂改(打草稿,画好草图),

解后检验成习惯(第一印象要自信)

② 解题术:选择题稳字当头做,填空题思前后解,中档难题边想边做,沉着应战立几题,最后两题细推敲.