复习指导

函数不等式的解题技巧(连堂讲稿)

528415 广东省北大学园中山(小榄)学校中学部 许少华

[复习说明]

函数不等式既具有函数的抽象性又具有不等式的灵活性,对能力和潜能的考查具有独特作用,因此倍受命题者青睐,近几年高考试题就是很好的例证.本专题复习的重点是:函数与不等式的合理转化;难点是:函数性质与不等式性质的综合运用.

[内容提要]

1. 求解函数型不等式的基本方法:构造函数、变更主元、特值转化、系数代换、判别式法、单调性及数形结合等.

2. 常用化归方式:利用条件结合函数性质、不等式性质,将问题化归为函数问题或不等式问题.

[范例精选]

例1 设 $f(x)=ax^2+bx$ 且

$1\leqslant f(-1)\leqslant 2,\quad 2\leqslant f(1)\leqslant 4,$

求 $f(-2)$ 的范围.

解法1 由 $f(x)=ax^2+bx$ 构造函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$,则 $F(x)=ax+b$ 是一次函数.因此三点 $(-1,F(-1))$、$(1,F(1))$、$(-2,F(-2))$ 共线,即 $(-1,-f(-1))$、$(1,f(1))$、$(-2,-\frac{1}{2}f(-2))$ 共线.

$$\therefore\quad \frac{f(1)+f(-1)}{1+1}=\frac{-f(-1)+\frac{1}{2}f(-2)}{-1+2},$$

$\therefore\quad f(-2)=f(1)+3f(-1),$

又 $\because\quad 1\leqslant f(-1)\leqslant 2, 2\leqslant f(1)\leqslant 4,$

$\therefore\quad 5\leqslant f(-2)\leqslant 10.$

即 $f(-2)$ 的取值范围是 $[5,10]$.

解法2 联立 $\begin{cases}f(1)=a+b,\\ f(-1)=a-b;\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\ b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

则 $f(x)=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)]x^2+\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)]x,$

从而 $f(-2)=2[f(1)+f(-1)]-[f(1)-f(-1)]=f(1)+3f(-1).$

以下同解法1

评注 解法1揭示了一次函数与二次函数的联系,解法2的关键是用 $f(1)$、$f(-1)$ 表示系数 a、b,本题还可用数形结合来解.

例2 设 $a\in\mathrm{R}$,函数 $f(x)=ax^2+x-a\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.若 $|a|\leqslant 1$,求证:

$$|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}.$$

证法1 $f(x)=ax^2+x-a$
$=(x^2-1)a+x$

视为 a 的一次函数,记

$f(x)=F(a)=(x^2-1)a+x,$

$\because\quad |a|\leqslant 1,$

$\therefore\quad |f(x)|=|F(a)|$

$\leqslant\max\{|F(1)|,|F(-1)|\}$

$=\max\{|x^2-1+x|,|-x^2+1+x|\}.$

$\because\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$

$\therefore\quad |x^2-1+x|$

$=|(x+\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}|\leqslant\frac{5}{4},$

$|-x^2+1+x|$

$=|-(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}|\leqslant\frac{5}{4}.$

故 $|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}.$

证法2 由 $f(x)=ax^2+x-a$ 得

$|f(x)|=|a(x^2-1)+x|$

$\leqslant|a|\cdot|x^2-1|+|x|$

$\leqslant|1-x^2|+|x|.$

$\because\quad -1\leqslant x\leqslant 1,$

$\therefore\quad 0\leqslant x^2\leqslant 1,$

$|1-x^2|+|x|=1-x^2+|x|$

$=-(|x|-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}\leqslant\frac{5}{4}.$

故 $|f(x)|\leqslant\frac{5}{4}.$

评注 解法1变更主元,解法2利用绝对值不等式进行放缩,这些都是求解函数型不等式的重要方法.

例3 设二次函数 $f(x)=x^2+bx+c(b,c\in\mathrm{R})$,无论 α、β 为何实数,恒有 $f(\sin\alpha)$

$\geqslant 0, f(2+\cos\beta)\leqslant 0$. (i) 求证：$b+c=-1$ 且 $c\geqslant 3$；(ii) 若函数 $f(\sin\alpha)$ 的最大值为 8，求 b、c 的值.

解　(i) 无论 α,β 为何实数，均有

$f(\sin\alpha)\geqslant 0,\quad f(2+\cos\beta)\leqslant 0,$

$\therefore\ f(1)\geqslant 0$ 且 $f(1)\leqslant 0$,

$\therefore\ f(1)=0,\quad \therefore\ b+c=-1,$

$$\therefore\ f(x)=x^2+bx+c=x^2-(1+c)x+c=(x-1)(x-c).$$

又　$f(2+\cos\beta)\leqslant 0$,

$\therefore\ f(3)\leqslant 0$，　则　$c\geqslant 3$.

(ii) $\because$

$$f(\sin\alpha)=\sin^2\alpha+b\sin\alpha+c=(\sin\alpha+\frac{b}{2})^2-1-b-\frac{b^2}{4},$$

又 $\because$ $-\dfrac{b}{2}=\dfrac{1+c}{2}\geqslant 2$,

$\therefore$ $\sin\alpha=-1$ 时 $f(\sin\alpha)$ 有最大值：

$$1-b+c=-2b=8,$$

$\therefore\ b=-4,\quad c=3.$

评注　特殊性存在于一般性之中，很多函数型不等式都是通过特殊值来抓住问题的本质，促使问题获解的.

例 4　若非零函数 $f(x)$ 满足：(i) 对任意实数 a,b 均有 $f(a-b)=\dfrac{f(a)}{f(b)}$；

(ii) 当 $x<0$ 时 $f(x)>1$；

(iii) $f(4)=\dfrac{1}{16}$.

试解不等式：$f(x-3)\cdot f(5-x^2)\leqslant\dfrac{1}{4}$.

解　由 $f(a-b)=\dfrac{f(a)}{f(b)}$,

令 $a=b$ 得　$f(0)=1$,

则　$f(-b)=f(0-b)=\dfrac{1}{f(b)}$,

$$f(a+b)=f[a-(-b)]=\frac{f(a)}{f(-b)}=f(a)\cdot f(b).$$

$$f(x)=f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=f(\frac{x}{2})f(\frac{x}{2})=f^2(\frac{x}{2})\geqslant 0,$$

从而　$f(4)=f^2(2)=\dfrac{1}{16}, f(2)=\pm\dfrac{1}{4}$.

又因为　$1=f(2-2)=f(2)f(-2)$,

且　$f(-2)>1$,

则　$0<f(2)<1$，即　$f(2)=\dfrac{1}{4}$.

因此，不等式等价于

$$f[(x-3)+(5-x^2)]\leqslant f(2).$$

设 $x_1<x_2$，则 $f(x_1-x_2)>1$,

即　$\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}>1$.

又可知　$f(x_2)>0$，则 $f(x_1)>f(x_2)$,

即　$f(x)$ 为减函数.

那么不等式又等价于

$$x-3+5-x^2\geqslant 2.$$

解得　$0\leqslant x\leqslant 1$.

故原不等式的解集为 $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

评注　函数的单调性是转化函数型不等式的常用思路. 本题首先应该想到最终转化为　$f(\cdots)\leqslant f(\cdots)$. 然后，再寻找左、右两边的转化策略.

例 5　设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 的两根 x_1、x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(i) 设 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{x_1}{2}$；

(ii) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明：

$x<f(x)<x_1$.　(1997 年全国高考题)

证明　(i)　$\because$　$x_0=-\dfrac{b}{2a}$,

$\therefore$　$-\dfrac{b}{a}=2x_0$,

又　$\because$　$0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$,

$$\therefore\ x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}=2x_0+\frac{1}{a}>2x_0+x_2,$$

则　$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

(ii)　$\because$　$g(x)=f(x)-x$ 的图象开口向上交 y 轴于 $A(0,c)$，在 x 轴上的左交点为 $B(x_1,0)$，$\therefore$ 过 A、B 的直线在区间 $(0,x_1)$ 上的图象在抛物线图象的上方，则

$$0<f(x)-x<-\frac{c}{x_1}(x-x_1),$$

即　$x<f(x)<\dfrac{c}{x_1}(x_1-x)+x$.

由　$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$ 及 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$ 得

$$c=x_1\cdot x_2\cdot a<x_1,$$

$\therefore$　$f(x)<1\cdot(x_1-x)+x=x_1$.

总之，当 $x\in(0,x_1)$ 时，$x<f(x)<x_1$.

评注　直接或间接地利用图象，可使抽象的问题变得形象直观，易于分析，易于求解. 第 (ii) 小题的解法不同于命题组提供的解法，请对比阅读.

[参考练习]

1. 选择题

(1) 定义在$(-\infty,+\infty)$上的奇数$f(x)$为增函数,偶函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上的图象与$f(x)$的图象重合,设$a>b>0$.给出下列不等式:

①$f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b)$

②$f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b)$

③$f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a)$

④$f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a)$

其中成立的是(　　).

(A)① 与 ③　　(B)② 与 ③

(C)① 与 ④　　(D)② 与 ④

(2)$f(x)$为R上的增函数,则$f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b)$是$a+b>0$的(　　)条件.

(A) 充分不必要　　(B) 必要不充分

(C) 充分必要　　(D) 既不充分也不必要

2. 填空

(1) 定义在$[-1,1]$上的奇函数$f(x)$为减函数,且满足$f(a)+f(a^2)<0$,则a的值是____.

(2) 奇函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内递增,且$f(-3)=0$,则不等式$xf(x)<0$的解集为____.

3. 函数$f(x)$满足$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$,且$f(x)$不恒为零.当$x>1$时,$f(x)>0$.解不等式:$f(x)+f(x+\frac{1}{2})<0$.

4. 设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$对一切实数$x\in[-1,1]$都有$|f(x)|\leqslant1$.证明:对一切$x\in[-1,1]$都有$|2ax+b|\leqslant4$.

5. 已知$f(x)$是定义在$\{x|x\in\mathrm{R},x\neq0\}$上的奇函数,且在$(-\infty,0)$上递增,$f(1)=0$,解关于$x$的不等式$f[\log_a(1-x^2)+1]>0$　(其中$a>1$).

6. 已知函数$f(x)$对于任意s、$t\in\mathrm{R}$都有$f(s+t)-f(t)=(s+2t+1)s$,且$f(1)=0$.又当$x\in(0,\frac{1}{2})$时,不等式

$$f(x)<\log_a x-2$$

恒成立.试求实数a的取值范围.

简答与提示

1. (1)A　(2)C

2. (1) $0<a\leqslant1$.

(2)$\{x|-3<x<3,x\neq0\}$.

3. 由$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$,则$f(1)=0$,$f(\frac{1}{y})=-f(y)$,$f(xy)=f(x)+f(y)$,从而原不等式转化为$f[x(x+\frac{1}{2})]<f(1)$.

$\because\ f(1)=0,\quad\therefore\ f(-1)=0,$

$\therefore\ f(-x)=f(-1)+f(x)=f(x),$

$\therefore\ f(x)$为偶函数.

又由$x>1$,$f(x)>0$,可证$f(x)$在$(0,+\infty)$上递增.因此,不等式又转化为

$$\begin{cases}x(x+\frac{1}{2})\neq0,\\|x(x+\frac{1}{2})|<1.\end{cases}$$

解得　$\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}<x<0$

或　$0<x<\dfrac{1}{2}$　或　$\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$.

4. $|2ax+b|$

$\leqslant\max\{|2a+b|,|-2a+b|\}$.

$|2a+b|=|[f(1)+f(-1)-2f(0)]+[\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}f(-1)]|$

$=|\frac{3}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)-2f(0)|$

$\leqslant|\frac{3}{2}f(1)|+|\frac{1}{2}f(-1)|+|-2f(0)|$

$\leqslant\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+2=4$,

同理得　$|-2a+b|\leqslant4$.故结论成立.

5. $-1<\log_a(1-x^2)+1<0$或$\log_a(1-x^2)+1>1$,其中$a>1$,

解得原不等式的解集是

$$\{x|\sqrt{1-\frac{1}{a}}<x<\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}\text{ 或 }-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}}<x<-\sqrt{1-\frac{1}{a}}\}.$$

6. 取$s=1,t=0$,则$f(1)-f(0)=2$,

结合　$f(1)=0$　得　$f(0)=-2$,

则　$f(x)+2=f(x)-f(0)$

$=f(x+0)-f(0)=(x+0+1)x$

$=(x+1)x$,

故当　$x\in(0,\frac{1}{2})$时不等式$(x+1)x<\log_a x$恒成立,结合图象法解得

$$\begin{cases}0<a<1,\\(\frac{1}{2}+1)\frac{1}{2}\leqslant\log_a\frac{1}{2},\end{cases}$$

解得实数a的取值范围是

$$\{a|\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\leqslant a<1\}.$$

(收稿日期:20010508)