

利用 TI-Nspire 技术 探究一例三角形面积最大值的问题

高建彪

(广东省中山市东升高中 528414)

智能手机的普及推广了微博的应用. 笔者最近关注德州仪器公司教育技术的微博, 中“发现数学之趣”的一些话题, 请看 2012 年 8 月 20 日的一个问题.

问题 满足条件 $AB=2$, $AC=\sqrt{2}BC$ 的 $\triangle ABC$ 的面积的最大值是多少? 为什么?

分析 设 $BC=x$, 则 $AC=\sqrt{2}x$, 由已知 $AB=2$ 及海伦公式 $S_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 其中 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ (a, b, c 为三角形三边), 可以写出三角形面积的函数表达式, 再求函数的最大值; 或者先由余弦定理求出一个内角的余弦, 再由三角函数中的平方关系 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 求出正弦, 由三角形的面积公式 $S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab\sin C$ 写出面积函数式, 最后再求函数的最大值. 这两种方法都是通过函数建模解决实际应用问题的方法, 但真要动笔计算, 又有些犹豫, 顾虑着计算过程比较复杂,

所以尝试应用 TI-Nspire 图形计算器(以下简称 TI)的 CAS(计算机代数系统)技术来解决此问题.

解法 1 海伦公式

如图 1 所示, 打开 TI 的计算器功能, 先由海伦公式及已知条件完成目标函数 $f(x)$ 的定义, 用函数 $f(x)$ 表示三角形的面积, 再直接调用计算器功能中的求最大值命令直接求解, 或者用导数的方法进行求解. 在研究过程中, 海伦公式、导数方法、建模方法等数学知识与方法都落在解题的实处, 将繁琐的计算交给了机器之后, 所需的数学知识与方法达到了最直接的巩固与掌握.

解法 2 三角方法

如图 2 所示, 先由余弦定理求出角 C (即 θ) 的余弦, 再依次求正弦、面积、函数最大值点及最大值. 与解法 1 类似, 利用 TI 的 CAS 技术, 繁琐的计算让机器替代了, 在运算的过程中, 我们锤炼了余弦定理、平方关系、建模方法等数学知识与方法.

The image shows a TI-Nspire CAS calculator screen with the following content:

- Top line: $f(x) := \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} \mid a=x \text{ and } b=\sqrt{2} \cdot x \text{ and } c=2 \text{ and } s = \frac{a+b+c}{2} \text{ and } x>0$
- Second line: $f(x)$ and the expression $\frac{\sqrt{-x^4 + 24x^2 - 16}}{4}, x>0$
- Third line: $fMax(f(x), x)$ and the result $x=2 \cdot \sqrt{3}$
- Fourth line: $f(x) \mid x=2 \cdot \sqrt{3}$ and the result $\frac{\sqrt{32}}{2}$
- Fifth line: $\frac{\sqrt{32}}{2}$ and the result $2 \cdot \sqrt{2}$
- Sixth line: $\frac{d}{dx}(f(x))$ and the expression $\frac{-x \cdot (x^2 - 12)}{2 \cdot \sqrt{-x^4 + 24x^2 - 16}}, x>0$
- Seventh line: $solve(\frac{d}{dx}(f(x))=0, x)$ and the result $x=2 \cdot \sqrt{3}$
- Bottom right corner: 7/99

图 1

$$\cos(\theta) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b} \mid a=x \text{ and } b=\sqrt{2} \cdot x \text{ and } c=2 \text{ and } x>0 \quad x>0 \text{ and } \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2} \cdot (3 \cdot x^2 - 4)}{4 \cdot x^2}$$

$$\sin(\theta) = \sqrt{1 - (\cos(\theta))^2} \mid x>0 \text{ and } \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2} \cdot (3 \cdot x^2 - 4)}{4 \cdot x^2} \quad x>0 \text{ and } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{-2 \cdot (x^4 - 24 \cdot x^2 + 16)}}{4 \cdot x^2}$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\theta) \mid a=x \text{ and } b=\sqrt{2} \cdot x \text{ and } x>0 \text{ and } \sin(\theta) = \frac{\sqrt{-2 \cdot (x^4 - 24 \cdot x^2 + 16)}}{4 \cdot x^2}$$

$$s = \frac{\sqrt{-x^4 + 24 \cdot x^2 - 16}}{4} \text{ and } x>0$$

$$\Omega \text{Max} \left(\frac{\sqrt{-x^4 + 24 \cdot x^2 - 16}}{4}, x \right) \mid x>0 \quad x = 2 \cdot \sqrt{3}$$

$$s = \frac{\sqrt{-x^4 + 24 \cdot x^2 - 16}}{4} \mid x = 2 \cdot \sqrt{3} \quad s = 2 \cdot \sqrt{2}$$

图 2

研究到这里,或许将有一个疑惑,如果不借助 TI 技术,笔算又将如何呢?毫无疑问,前面建立函数模型的过程,只有仔细代入公式进行计算,在得到目标函数之后,可以将根号内用配方法研究目标函数的最大值. 还有其它思路与方法吗? 问题可以拓展研究吗? 带着这些疑惑,我们借助 TI 技术继续探索.

探索 1 动态捕捉

如图 3 所示,打开 TI 的图形功能,构造出符合条件的动态 $\triangle ABC$ (底边 AB 固定,顶点 C 运动),将 BC 边长度及测得 $\triangle ABC$ 面积存储为变量,并在添加的电子表格页面中进行数据自动捕捉(如图 4).

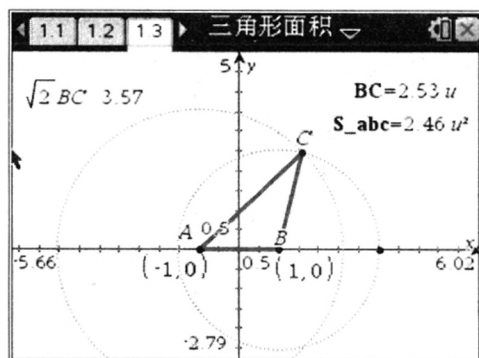


图 3

添加一个图形页,将电子表格中捕捉到的数据以散点图形式作出,如图 5 所示. 又进一步作出解法①中得到的目标函数图像,由图 6 可知,自动捕捉的样本点,全部落在解法①的目标函数图

1.2 1.3 1.4 三角形面积		
bc0 s0		
=capture(bc,1)=capture(s_abc,1)		
1	2.12245	2.11869
2	1.90204	1.89964
3	1.82857	1.82119
4	1.79184	1.78094
5	1.7551	1.73998
6	1.71827	1.69231
B519		

图 4

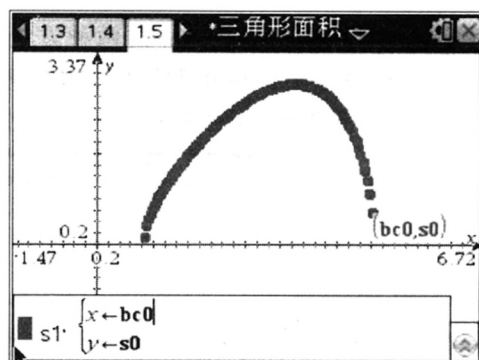


图 5

像之上.

在 TI 技术手段的帮助了,从实践的角度进行了既实在又形象的探索. 作出图 3 之时,又会联想到 $\triangle ABC$ 顶点 C 的轨迹如何,于是继续进行轨迹的探索.

探索 2 轨迹研究

在图 3 的基础上,利用 TI 技术的几何之轨迹

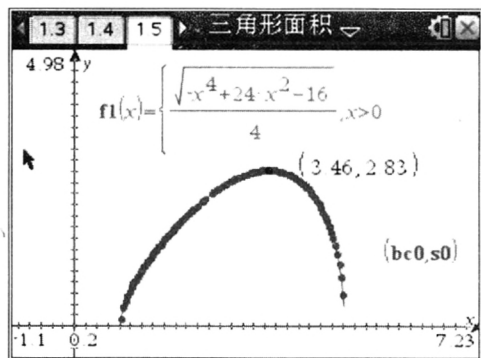


图 6

作图功能,作出 $\triangle ABC$ 顶点 C (即两圆交点)的轨迹,观察结果是一个圆,如图 7 所示.

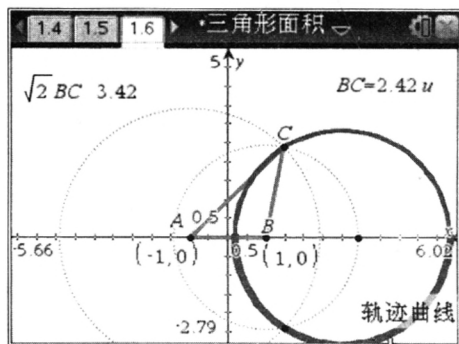


图 7

$\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}}{\sqrt{x^2+2\cdot x+y^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1}}{\sqrt{x^2+2\cdot x+y^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2+2\cdot x+y^2+1}$
$(\sqrt{x^2-2\cdot x+y^2+1})^2 = (\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{x^2+2\cdot x+y^2+1})^2$	$4(x^2-2\cdot x+y^2+1) = 2(x^2+2\cdot x+y^2+1)$
$4(x^2-2\cdot x+y^2+1) = 2(x^2+2\cdot x+y^2+1)$	$2x^2-12x+2(y^2+1) = 0$
$2x^2-12x+2(y^2+1) = 0$	$x^2-6x+y^2+1 = 0$
$\frac{2x^2-12x+2(y^2+1)}{2} = 0$	$(x-3)^2+y^2=8$
$\text{completeSquare}(x^2-6\cdot x+y^2+1=0, x, y)$	$(x-3)^2+y^2=8$
$(x-3)^2+y^2=8 x=3$	$y^2=8$
$s = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{y^2} \cdot y^2 = 8$	$s = 2 \cdot \sqrt{2}$

图 8

再进一步利用 TI 的 CAS 功能,先由两点距离公式列出方程式,再经历去分母、平方、移项、化系数为 1、配方等过程,从轨迹方程的角度严格说明了轨迹为圆,如图 8 所示. TI 的 CAS 代数运算的经历,扎扎实实的凸显了求轨迹方程的算理.

小结语 在微博中,开辟一片学习与研究的净土,传授学科文化与教育技术,相信能使学习与研究的队伍得以扩大. 信息技术迅猛发展的今天,熟练自如地运用信息技术手段,必定能使我们的学习与研究如虎添翼.

参考文献

- 1 吴爱龙. 一个面积最大值问题的海伦解法. 中学生数学, 2002, 9
- 2 高建彪. 源于网络讨论与 TI 教育技术的数学发现之旅——基于 TI 技术缤纷数学 QQ 群的问题讨论纪实. 中小学信息技术教育, 2012, Z1

- 3 <http://weibo.com/nspire>

利用TI-Nspire技术探究一例三角形面积最大值的问题

作者: [高建彪](#),
作者单位: [广东省中山市东升高中 528414](#)
刊名: [数学通报](#) 
英文刊名: [Bulletin des Sciences Mathematics](#)
年, 卷(期): 2012, 51(10)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_sxtb201210020.aspx