借助 TI 图形计算器 CAS 功能解高考题

徐 勇（广东省教育研究院）
高建彪（广东省中山市东升高中）

摘要： 广大 TI 图形计算器的使用者，对其强大的 CAS 功能略显陌生，文章精选 2012 年广东高考理科数学部分试题，结合 TI 图形计算器的 CAS 功能进行研究与探索，经历之后必将感受 TI 技术之 CAS 功能替代成为高级草稿纸之绝妙，同时意识到技术背景下的计算能力不再是烦琐的死算，而是形成并掌握解决数学问题的算理.

关键词： 广东高考；CAS 功能；TI 教育技术；图形计算器

大约在 20 世纪 60 年代，人们需要利用计算机进行代数运算的研究，于是诞生了计算机代数系统（Computer Algebra System），简称 CAS，它是一种智能化的运算，处理的是符号，其显著标志是能够以字符串作为运算单位，所以又称为符号运算，例如，$2*2$ 是数值运算，而 $2*a$ 是符号运算. 符号可以代表整数、有理数、实数和复数，也可以代表多项式、函数，还可以代表数学结构，如集合、群的表示，等等. 人们在数学的教学和研究中，用笔和纸进行的数学运算多为符号运算.

一般来说，一个常见的计算机代数系统包含以下基本功能： 超大型整数快速运算、任意精度的浮点数运算、整数的素数判定、因子分解、数论函数等；多项式的基本运算、最大公因子、因式分解等；矩阵的基本运算、线性方程组、特征值、矩阵函数、精确线性代数等；方程求解和方程组求解、丰富的基本函数与特殊函数支持、数学常数、表达式的化简与归约、极限过程、符号微分、符号积分、符号求和、微分方程符号求解等.

具有 CAS 功能的计算机软件很多，但大多较为庞大，还需要借助一台电脑完成，而具有“移动数理实验室”之称的 TI 图形计算器，推出了 CAS 运算功能，最先进的一款机型是 TI-NspireTM CX CAS（OS 版本 3.2），下面笔者结合 2012 年全国普通高考广东理科数学试题，谈谈 TI 图形计算器 CAS 运算功能的应用.

一、CAS 功能再现函数单调性定义法

例 1（理 4）下列函数中，在区间（0，+∞）上为增函数的是（　　）.

（A）$y=\ln(x+2)$　　（B）$y=-\sqrt{x+1}$

（C）$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　（D）$y=x+\frac{1}{x}$

解析： 此题用 TI 图形计算器探索时，先添加一个新问题下图形页面，再依次输入四个函数表达式，得到图 1 所示的图象，直接由图象可以观察出答案. 然而，更深层次的研究是用 CAS 功能来研究单调性，例如研究双钩函数的单调性，先求函数定义域，再按定义法讨论单调性，其步骤（作差→因式分解→判别符号→结论）在图 2 中得以再现.

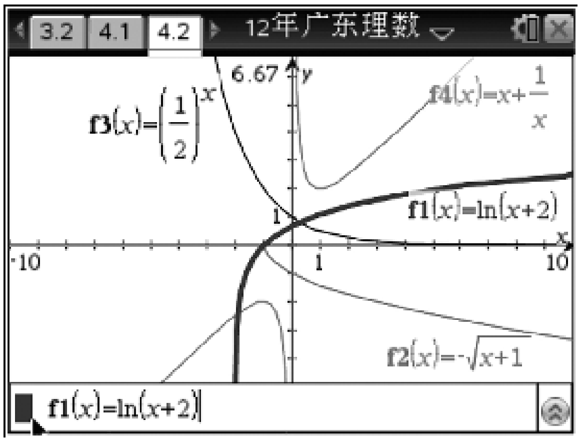

图 1

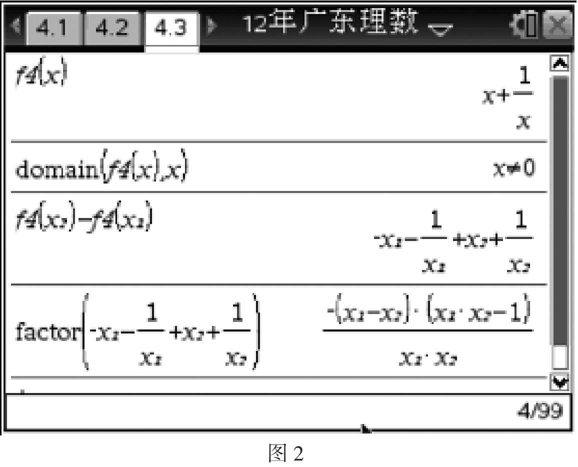

图 2

收稿日期： 2012-07-12
作者简介： 徐勇（1958-），男，安徽芜湖人，教研员，主要从事中学数学教育研究.

二、CAS 功能应对立体几何中公式计算

例 2 （理 6）某几何体的三视图如图 3 所示，它的体积为（　　）.

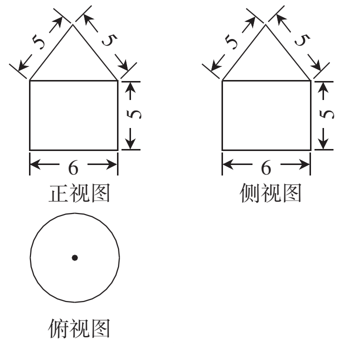

图 3

（A）12π　　（B）45π　　（C）57π　　（D）81π

解析：先由三视图还原出立体图，易知它是一个由上部分圆锥、下部分圆柱构成的组合体，根据已知圆锥的母线长 5、圆柱的高 5 与底面直径 6，直接由数值运算可以列出计算式，然而更体现数学味的是采用公式计算，两者对比如图 4 所示.

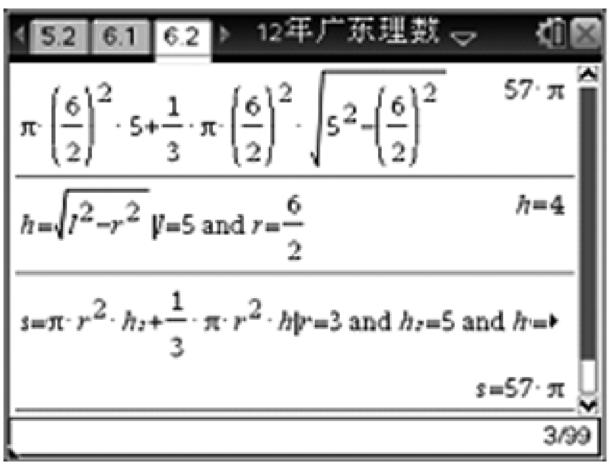

图 4

TI 技术解决此题还没有体现 CAS 运算优势，若将此题进行变式：该组合体中，圆锥母线长 5，圆柱高 5. ① 若组合体表面积为 30π 时，求半径大小；② 试求组合体体积的最大值及相应半径大小. 两个变式的 CAS 运算过程如图 5 所示，看图易知解题思路，能看到图中两种求函数极值点的方法，并能体会 CAS 功能之强大.

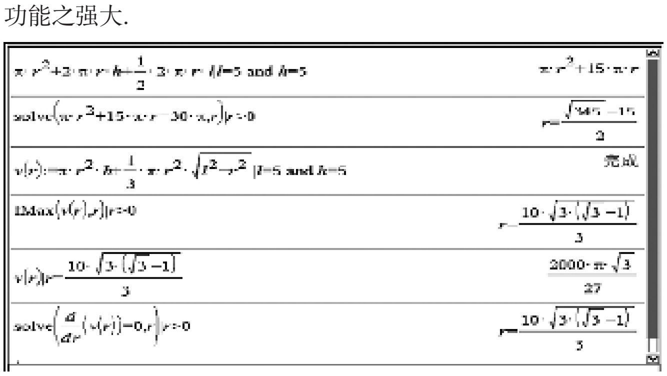

图 5

三、CAS 功能依据数列中公式与符号运算

例 3 （理 11）已知递增的等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_3=a_2^2-4$，则 $a_n=$__________.

解析：数列计算中，所要用到的公式比较多，似乎用计算器无法完成，然而我们用 TI 图形计算器的 CAS 运算功能，也能轻松进行数列中的公式运算与相关符号的运算，此题的 TI 技术求解过程如图 6 所示，由图可以看出，技术解题能帮助我们巩固数列基础知识，锤炼解决数学问题的算理，即解题步骤与思路.

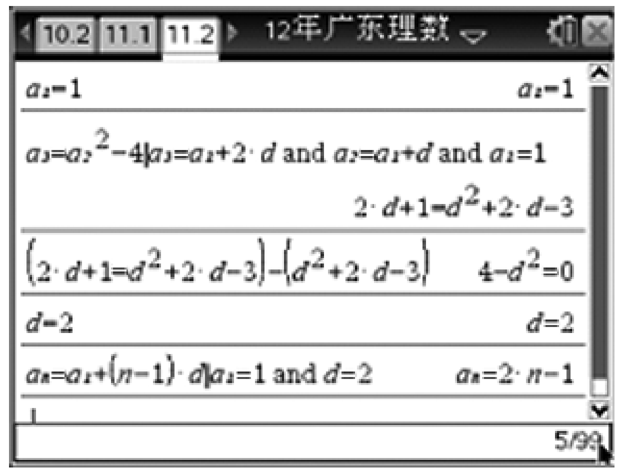

图 6

四、CAS 功能直接求解曲线切线方程

例 4 （理 12）曲线 $y=x^3-x+3$ 在点（1，3）处的切线方程为________.

解析：先新建一个图形页，从形的角度直接测量出切线的方程，如图 7 所示. 这种方法只能起到验证结果的作用，我们需要掌握的是求曲线切线方程的方法，即求导→求切线斜率→写出点斜式方程，这一计算过程由 TI 的 CAS 功能可轻松再现，如图 8 所示.

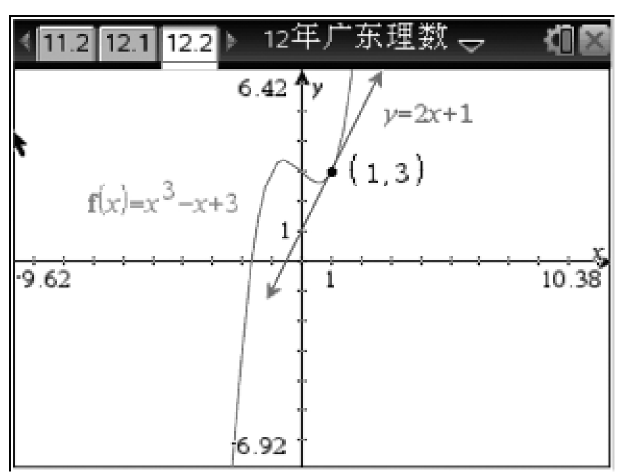

图 7

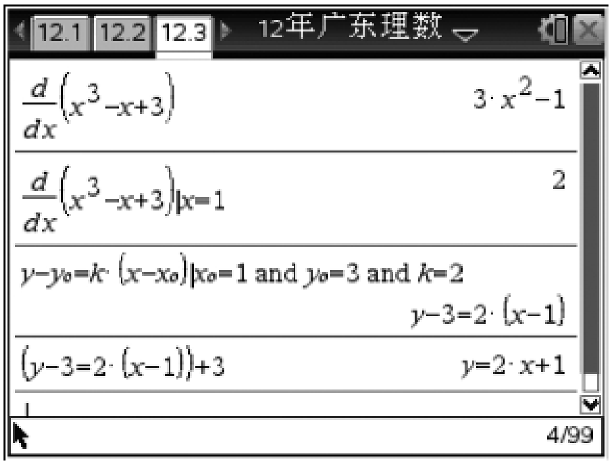

图 8

五、CAS 功能完美呈现向量法求解空间角

例 5 （理 18）如图 9 所示，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA\perp$平面 $ABCD$，点 E 在线段 PC 上，$PC\perp$平面 BDE.

（1）证明：$BD\perp$平面 PAC.

（2）若 $PA=1$，$AD=2$，求二面角 $B\text{-}PC\text{-}A$ 的正切值.

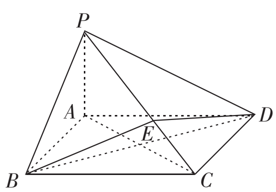

图 9

解析：第(1)问由已知垂直关系易得，从而底面为正方形，以 A 为坐标原点，AB、AD、AP 为 x、y、z 轴，建立空间直角坐标系，再由空间向量来完成计算，即先定义 A、B、C、P 的坐标，计算$\overrightarrow{PA}$、$\overrightarrow{PC}$，然后设平面 PAC 的法向量 $\boldsymbol{n}$，由两个数量积为 0 解出一个法向量 $\boldsymbol{n}$；同样算出平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}$，再算两个法向量的夹角余弦，最后求正切. 这些过程由图 10～13 完美呈现.

图 10

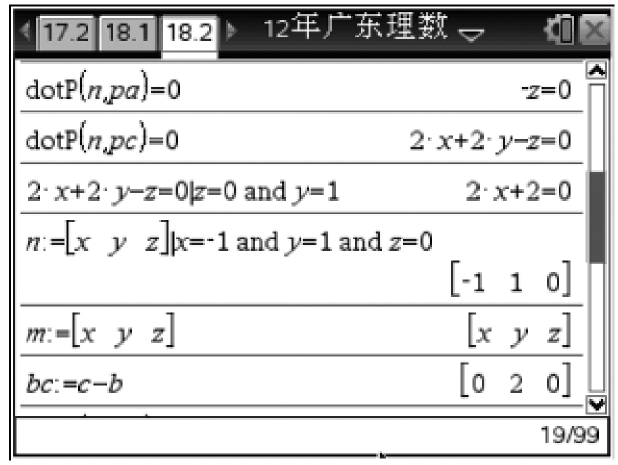

图 11

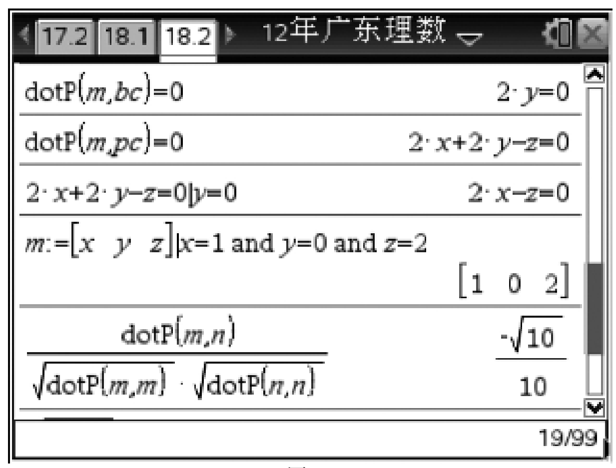

图 12

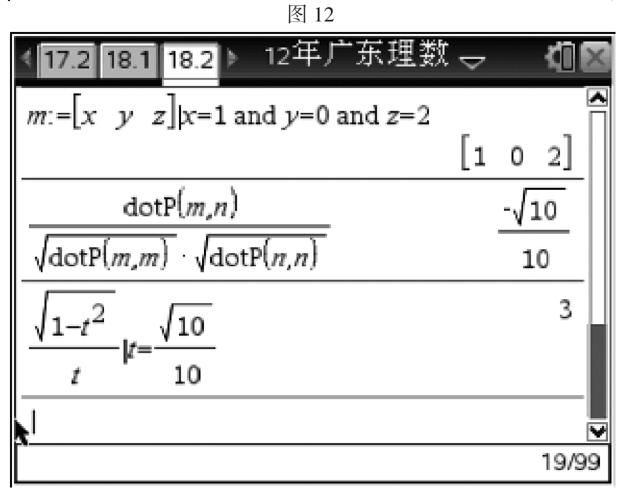

图 13

【评析】向量法解决立体几何问题，关键是理顺求解空间距离与角度的思路. 此例二面角的 TI 技术 CAS 解法，展示了向量法求二面角的算理（即解题思路与步骤）.

六、CAS 功能全面解决解析几何问题

例 6 （理 20）在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率 $e=\sqrt{\frac{3}{2}}$，且椭圆 C 上的点到 $Q(0，2)$的距离的最大值为 3.

（1）求椭圆C的方程；

（2）在椭圆C上，是否存在点$M(m，n)$使得直线l：$mx+ny=1$与圆O：$x^2+y^2=1$相交于不同的两点A、B，且$\triangle OAB$的面积最大？若存在，求出点M的坐标及相对应的$\triangle OAB$的面积；若不存在，请说明理由.

解析：第一步，求椭圆C的方程. 如图14所示，添加一个新问题下计算页，写出离心率，设$a=3k$，求出c、b，并代入椭圆方程，再写出两点距离，并用k表示，进一步求表达式的最大值，由距离最大值为3而求出k.

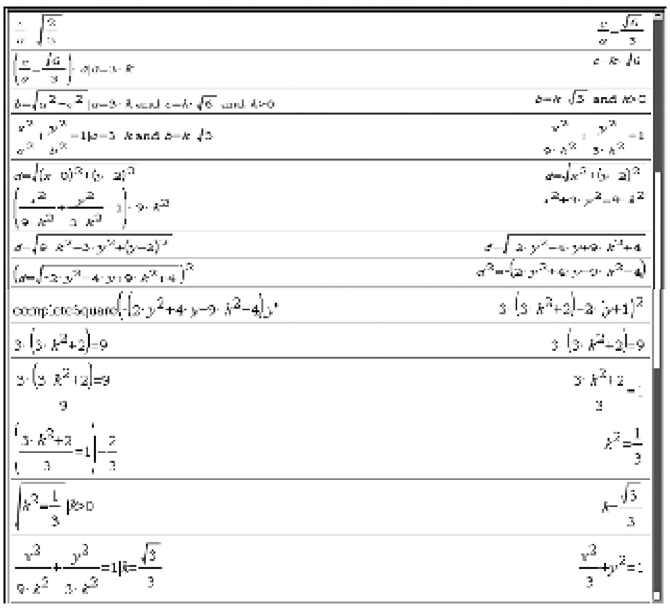

图 14

第二步，探索点M. 添加一个计算页，点（m，n）代入椭圆方程，再写出圆心$O(0，0)$到直线l：$mx+ny=1$的距离，并求出直线l与圆相交的弦长，最后计算出$\triangle OAB$的面积，整理为关于m的函数，进一步求函数的最大值，如图15所示.

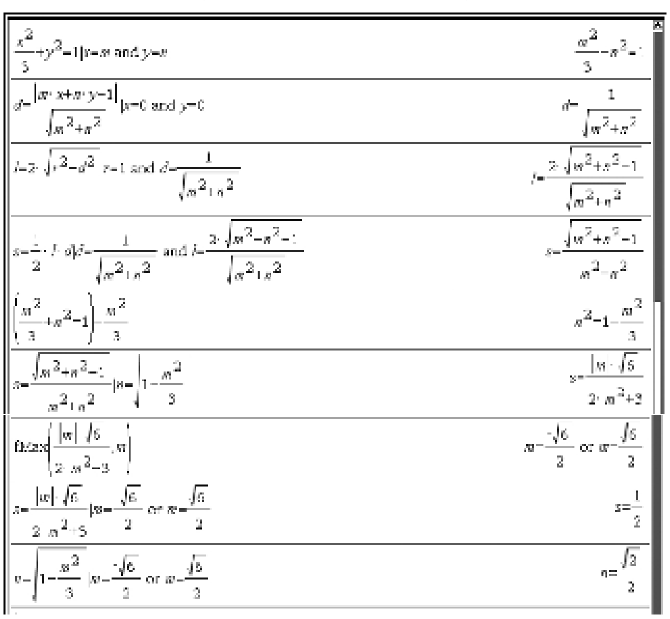

图 15

【评析】解析几何问题最能体现TI图形计算器解题的优势，因为利用TI技术，既可以从图形上进行探索，又可以从CAS计算上进行研究，每一步运算都是算理的形成之路.

七、CAS功能探寻压轴题思路与解答

例7 （理21）设$a<1$，集合$A=\{x\in\mathbf{R}|x>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

（1）求集合D（用区间表示）；

（2）求函数$f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$在D内的极值点.

解析：第一步，先作图观察集合D，如图16～19所示，由图可知：当$a\leqslant 0$时，$D=(x_2，+\infty)$；当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$（猜测值）时，$D=(0，x_1)\cup(x_2，+\infty)$；当$\frac{1}{3}<a<1$时，$D=(0，+\infty)$. 其中$x_1$，$x_2$为两零点，且$x_1<x_2$.

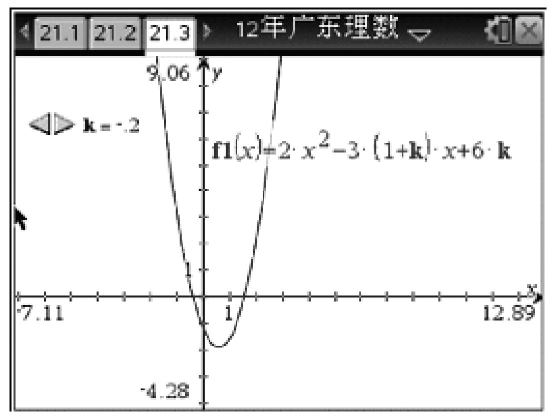

图 16

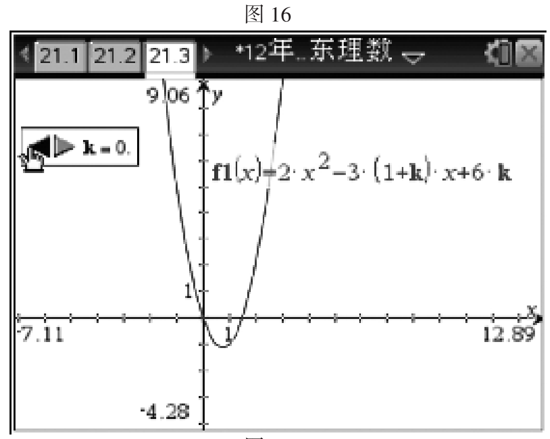

图 17

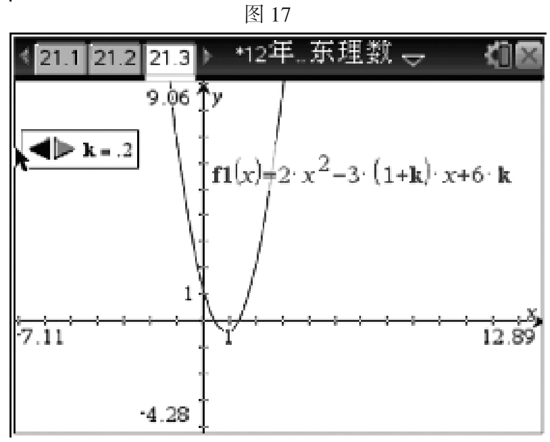

图 18

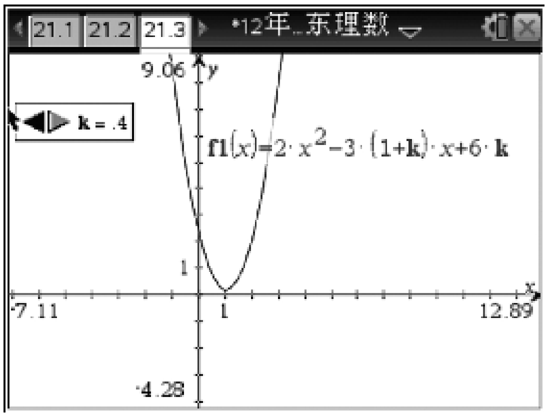

图 19

第二步，代数方法求解集合 D，即利用 TI 技术的 CAS 功能，如图 20 所示，先定义 $b(x)=2x^2-3(1+a)x+6a$，解 $b(x)=0$ 记两根为 x_1，x_2，然后分别解不等式 $x_1<0$，$x_2<0$，$x_1>0$，$x_2>0$ 及判别式 <0，得到 a 的不同范围，再根据看图分析的结论，写出集合 D.

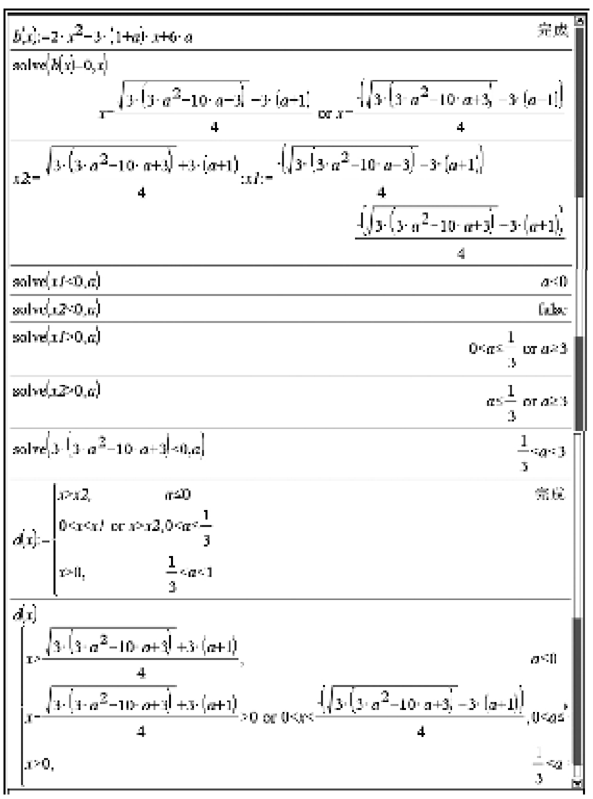

图 20

第三步，观察极值点的功能. 如图 21，先定义 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$，并求导，分解因式. 再添加一个图形页，插入游标 k，设置范围为 $-2\sim1$，步长为 0.1，然后作出曲线 $f_1(x)=2x^2-3(1+k)x+6k$ 与 $f_2(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$，改变 k 值大小，观察不同 k 值时集合 D 上函数 $f_2(x)$ 极值点情况. 由图 22～24 可知：当 $a\leqslant0$ 时，$f_2(x)$ 在区间 D 上无极值点；当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时，有一个极值点 a；当 $\dfrac{1}{3}<a<1$ 时，有两个极值点 a 与 1.

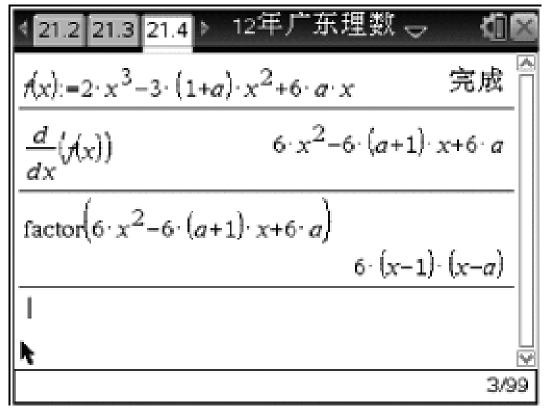

图 21

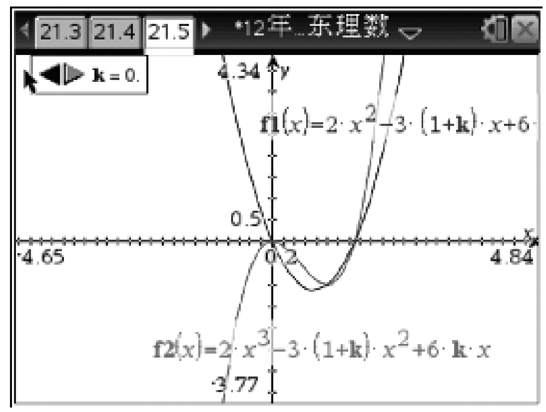

图 22

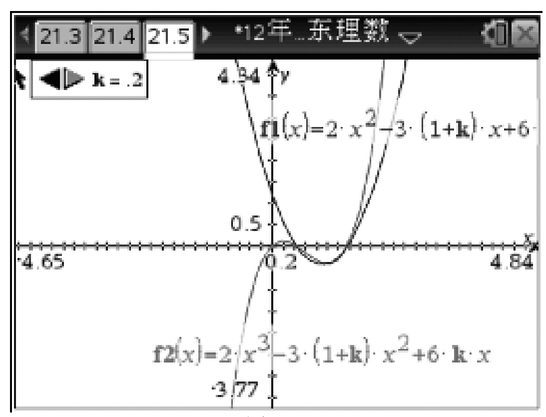

图 23

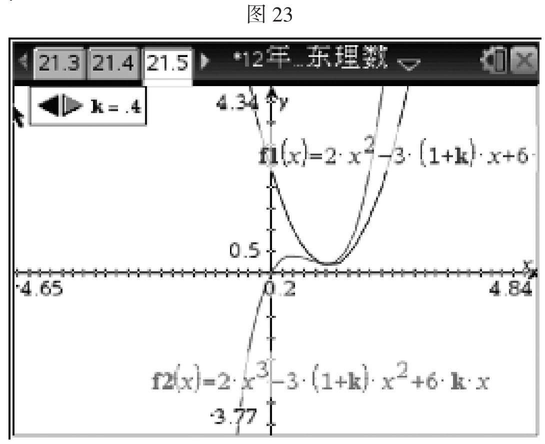

图 24

第四步，代数方法求集合 D 内极值点. 添加一记事本页，如图 25，分三种情况写出集合 D，前两种情况下，分别解不等式 $x_2<1$；$x_1>a$，$x_2<1$，根据 a 范围确定极值点.

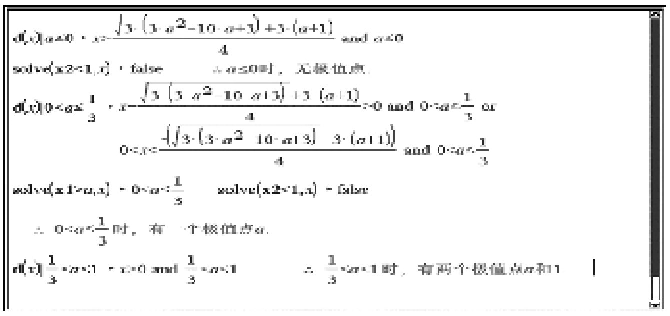

图 25

【评析】理科试卷最后一道压轴题的难度可想而知，但我们通过 TI 技术的图形与 CAS 运算，对函数综合的压轴题进行了剖析，这一剖析过程让我们清清楚楚地明白了此题的算理，从而充分说明一点，TI 技术能帮助我们有效破解难题，加深理解.

2012 年全国高考广东理科数学试题共 21 题（8 个选择，7 个填空（2 个选作），6 个解答），笔者尝试用 TI 技术进行求解，最终结果仅第 2 题（集合运算）暂时未发现 TI 解法，这一研究足以表明 TI 技术解决高中数学问题覆盖面之广. 在应用 TI 技术解决数学问题的过程中，其 CAS 运算功能应当引起我们的重视，因为有了 CAS 运算，我们可以将烦琐的计算交给机器，把机器当作草稿纸，在机器上进行草稿演算之后形成正确的操作指令，而系列操作指令就是我们数学学习的精髓，即解题步骤与方法所构成的算理.

（上接第 28 页）

识的混合、加工而成的. 教学中不但要善于引导学生把教材的各个局部知识按照一定的观点和方法组织成整体，熟练掌握基础知识，形成知识体系，同时，还要注意知识的发生过程的教学，特别要重视有关原理、法则、定理和公式的提炼和推导过程，例题的求解过程的教学，学生的素质和技能正是在这个过程中逐步形成和发展的.

2. 立足基础，突出主干

数学学科的基础知识和基本技能既是训练和形成数学能力的重要依据，又是数学学科素养的重要组成部分. 教学中，要引导学生关注对基础知识的学习和基本技能的训练，不但要关注对数学的概念、定义、定理、法则等显性知识的学习，更要关注对隐含在这些知识背后的重要数学思想、数学方法的学习，使他们在获取知识的过程中，同步地形成相应的数学思想方法，并自觉地运用这些数学思想指导解题实践，学会根据问题特点，合理选用恰当的数学方法来解决问题. 同时，在全面落实基础知识的前提下，更应花费足够的时间和精力搞好主干知识的教学，特别是对函数与导数、三角函数、数列、统计与概率、立体几何、解析几何等主干知识，要通过多种不同的形式突出这些主干内容的教学，并有计划地组织专题训练.

对基础知识和基本方法，应加强章、节知识过关，夯实基础，确保学生对数学基础知识、方法的理解和掌握；对主干内容，要从学科的内在联系和知识的综合的角度来组织材料，以典型例题为载体，以数学思想方法的灵活运用为线索，指导学生寻求问题解决的策略，切实提高学生独立解决问题的能力.

3. 着眼素质，强调能力

高考作为选拔性考试，偏重于对学生数学能力与素养的测验，经常设置一些开放性、探索性的试题，考查学生创造性地应用知识分析问题、解决问题的能力，考查创新意识和探究精神. 教学中应关注知识的发生过程、形成过程和应用过程，重视创设问题情景，合理引导学生进行自主、合作、探究学习，让学生体会知识的发生、发展及问题的解决过程，体会蕴含在其中的思想方法，理解数学问题的本质，注重培养其数学地提出问题、分析问题和解决问题的能力，发展创新意识和应用意识，提高数学探究能力、建模能力和交流能力，切忌停留在让学生盲目套用相关的定理、法则和公式进行解题上，坚决克服那种“掐头去尾烧中段”的做法，着力培养学生的自主探究能力.

4. 精选典例，科学练评

一方面牢固的“双基”是能力的载体，是促进知识迁移和能力发展的重要条件，离开了知识和方法谈能力是一句空话，但另一方面，知识和方法的学习仅仅是能力和素质形成的一种条件，而人的能力和素质只能在一定的实践活动中形成和发展. 因此，为使学生透彻地理解和运用新概念、新方法解决新问题，形成相应的能力和素质，还必须通过一定的练习作业. 教学中一定要根据教学内容适时地选编适量的具有思考价值能揭示知识内涵的典型练习题，组织学生进行应用知识的解题实践，促使学生真正领会教学内容，及时纠正其仅仅停留在“字面”上的理解，使他们真正内化和巩固习得的知识和方法，从而把所学知识稳固地纳入到原有的认知结构中去，形成相应的能力. 同时，每次练习后应让学生适当地反思回味，体会这些内容反映的数学思想方法. 评讲时，要突出通性、通法，淡化特殊技巧，要讲到点子上.

5. 关注阅读，规范表达

在每年的高考阅卷中，我们都发现学生在对题目的阅读理解和解题表达上存在较为严重的缺陷，由于曲解题意、表达不到位等方面原因造成的失分十分严重. 语言是思维的载体，是思维的外部表现形式. 熟悉数学语言（包括文字语言、符号语言、逻辑语言、图表语言）是阅读、理解和表述数学问题的基础，只有具备了熟练的表述能力，才能有效地进行数学交流. 在数学教学中关注数学语言的教学，加强数学阅读训练，重视培养学生的口头和书面表达能力，力求表述的准确性、逻辑性、完整性和流畅性.