

基于 CASIO fx-CP400 技术支撑下函数模型拟合之递进探索

广东省中山市东升高中 高建彪 (18928102686, 76456245@qq.com)

摘要:

本文从普通高中新课程标准中,梳理出有关函数模型拟合的问题,利用图形计算器 CASIO fx-CP400 的技术平台支撑,进行待定系数法、线性回归、非线性回归等三个水平层次的函数模型拟合.技术的运用,只是为数学学习铺路.思维的锤炼,借助技术得以强化.

关键词: 手持技术 回归分析 模型拟合 实践探索

函数模型的拟合研究,在普通高中新课程标准数学内容的编排中,分别在《数学 1》、《数学 3》及选修系列等三个不同的阶段都提出了要求.很显然,三个模块对同一内容的要求有所不同,分别代表了三个不同的层次,那么我们在这三处教与学的过程中,到底是如何处理函数模型拟合的呢?

我们在教学中,经常见到一些教师或学生在《数学 1》中处理函数模型拟合时,用到了回归分析的手段与技术,在《数学 3》中用到了非线性回归的分析,笔者感觉有所不妥,偏离了教材的要求,所以撰写此文与同行分享,希望能纠正瑕疵,同时抛砖引玉.在研究探索的过程中,由于要对数据进行运算处理,所以利用具有便携特点,功能强大的图形计算器配合研究,文中所用型号为 CASIO fx-CP400,其主界面如图 1 所示.



图 1

一、教材凸显价值的案例

人教 A 版普通高中课程标准实验教材《数学 1》的第三章,研究函数模型及其应用时,在第 105 页有这样一道例题:

例 某地区不同身高的未成年男性的体重平均值如下表:

身高/cm	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170
体重/kg	6.13	7.90	9.99	12.15	15.02	17.50	20.92	26.86	31.11	38.85	47.25	55.05

(1) 根据上表提供的数据,能否建立恰当的函数模型,使它能比较近似地反映这个地区未成年男性体重 y kg 与身高 x cm 的函数关系? 试写出这个函数模型的解析式.

(2) 若体重超过相同身高男性体重平均值的 1.2 倍为偏胖,低于 0.8 倍为偏瘦,那么这个地区一名身高为 175 cm, 体重为 78 kg 的在校男生的体重是否正常?

笔者认为此例具有研究价值,是因为此例贴近学生实际,且在模型拟合三个不同的水平层次均可选用此例探索研究,学生掌握拟合方法之后,能在周围抽样实践与验证探索.

二、待定系数法拟合引路

《数学 1》中的函数模型拟合的水平层次,方法上只能停留在初中就接触的待定系数法阶段,但函数模型的选取,可以超越初中所学的一次函数、二次函数,选用《数学 1》

中“基本初等函数”章节所提及的一些函数，具体选用什么函数模型，需要先作散点图，根据散点图的分布特征来选取适合的函数模型。

利用 CASIO fx-CP400 探索时，先进入 Statistics（统计）功能页，在表中将前两列命名为 x 、 y ，再分别录入身高与体重的 12 组数据（如图 2 所示），然后点击统计图的快捷图标，弹出统计图设置窗口，按图 3 所示进行设置，点击 Set 得到图 4 所示的散点图。

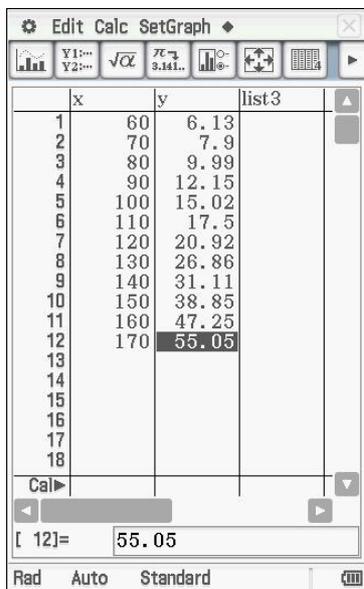


图 2

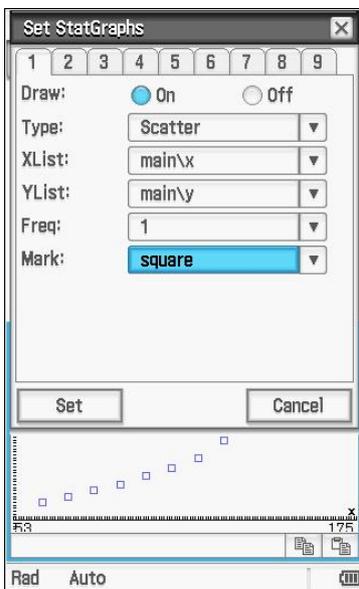


图 3

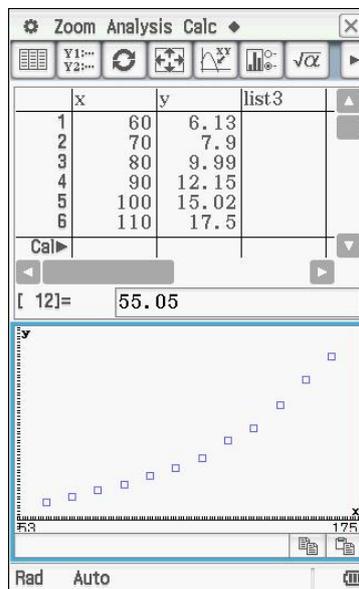


图 4

从散点图可以看出，样本点大概呈指数型曲线分布，所以选取函数模型 $y = a \cdot b^x$ 进行拟合。在这一函数模型中，有 a 、 b 两个系数待定，由此需要选取两个样本点，我们先考虑选取第 1 组、12 组数据，再考虑选取第 2 组、11 组数据，得到的结果如图 5、图 6 所示。

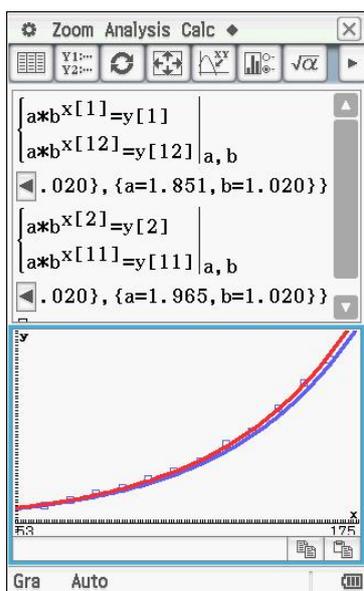


图 5

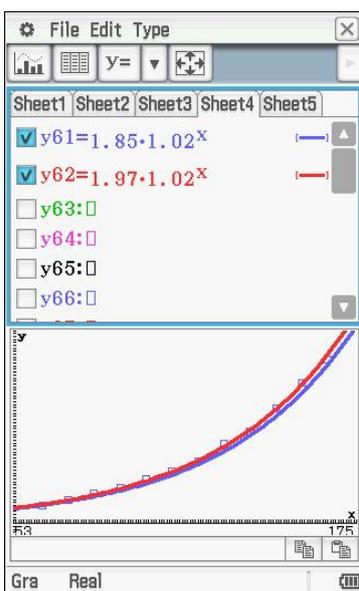


图 6

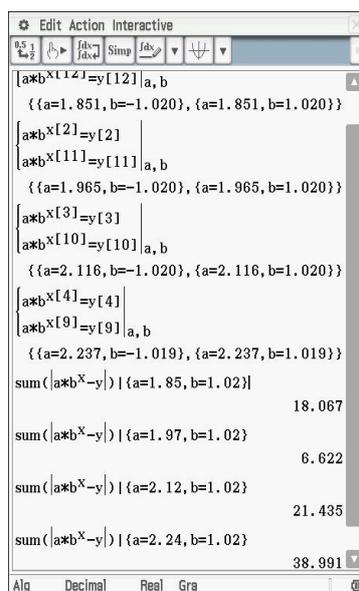


图 7

从图 5、图 6 的拟合曲线与散点图的关系，我们根本无法看出哪组数据的拟合效果好，人教 A 版教材中选取的是第 2 组、11 组数据，为何选取这组数据呢？教师在教和学生在学的过程中，肯定都会有这样的疑惑？怎样解决这个疑惑呢？

判断函数模型 $f(x)$ 的拟合程度，主要是看已知数据与其偏离程度。已知数据点 (x_i, y_i)

的与拟合模型 $f(x)$ 偏离程度，我们可以用 $|f(x_i) - y_i|$ 表示，暂且定义为偏差，从而可以用

偏差和 $\sum_{i=1}^n |f(x_i) - y_i|$ 的大小对函数模型的拟合效果进行比较。

如图 7 所示，我们分别计算选取第 1 与 12、2 与 11、3 与 10、4 与 9 组数据的偏差和，得到的结果分别约是 18.067、6.622、21.435、38.991，从而可以看出选取第 2 组、11 组数据的拟合效果较好，较好的阐释了人教 A 版《数学 1》中为何如此处理。

实际上，我们起初从散点图易联想到的一个拟合模型可能是二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ，尝试选取第 1、6、12 组数据，得到具体二次函数模型，如图 8 所示，计算其偏差和为 9.291，明显不如教材上指数型函数模型的拟合效果。

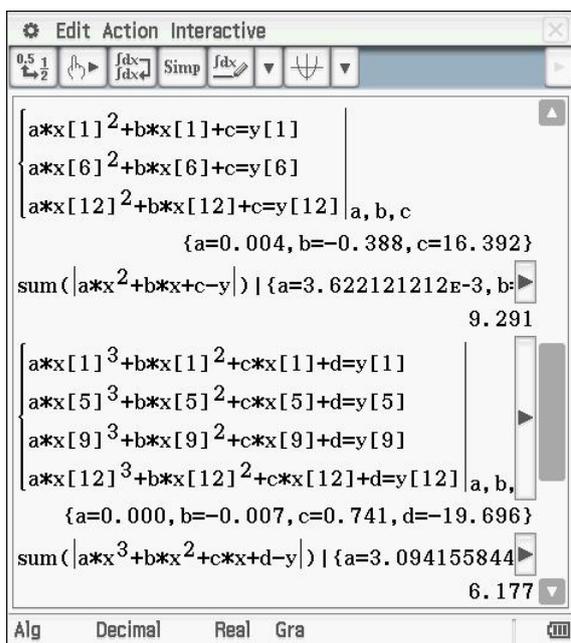


图 8

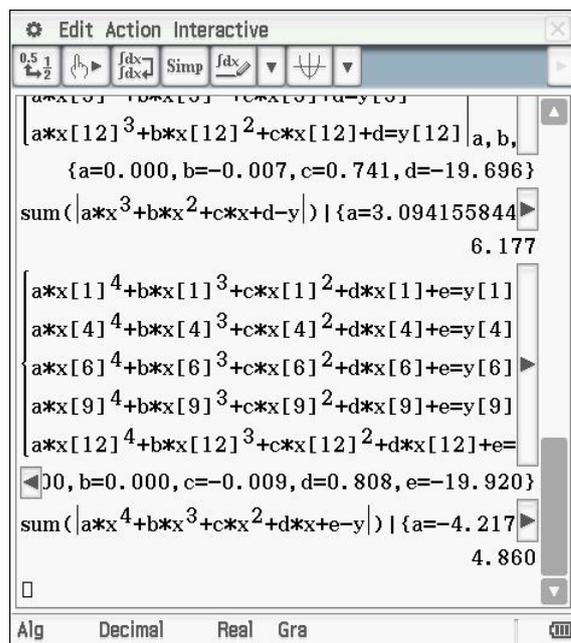


图 9

我们再进一步采用三次函数模型 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 进行拟合，选取第 1、5、9、12 组数据得到的具体模型如图 8 所示，计算其偏差和为 6.177，也只是与教材上选取指数型函数模型的拟合效果不相上下。

再进一步采用四次函数模型 $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 进行拟合，选取第 1、4、6、9、12 组数据得到的具体模型如图 9 所示，计算其偏差和为 4.860，虽然比教材上选取指数型函数模型拟合效果略强，但从模型的简单性来说，我们选取指数型函数模型 $y = a \cdot b^x$ 更好。

以上选取不同函数模型之后，利用待定系数法探索的过程，笔者认为只是模型拟合的引路，因为由几组样本点求解出的具体函数模型，并没有建立在全体样本点的数据基础上。

三、线性回归步入正轨

《数学 3》中的函数模型拟合的水平层次，虽然只是停留在线性回归分析的水平，但模型的计算，来源于全体样本点的数据，所以笔者认为这才是真正的数据拟合，将模型拟合推进到了正式轨道。

利用 CASIO fx-CP400 探索时，先进入 Statistics（统计）功能页，在表中录入身高数据 x 与体重数据 y 之后，直接调用菜单中的线性回归分析（如图 10 所示），按图 11 所示进行

设置，点 OK 得到图 12 所示的结果，从相关系数 $r=0.965$ 可以看出，线性回归的拟合效果也较好。但在散点图中同时作出拟合直线，如图 13 所示，明显看出其拟合效果不如《数学 1》中所选取的指数型函数模型拟合效果好。

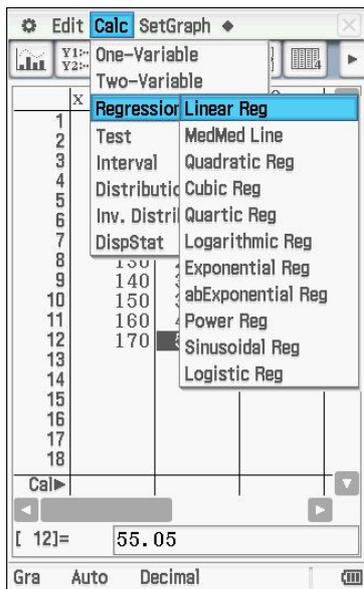


图 10

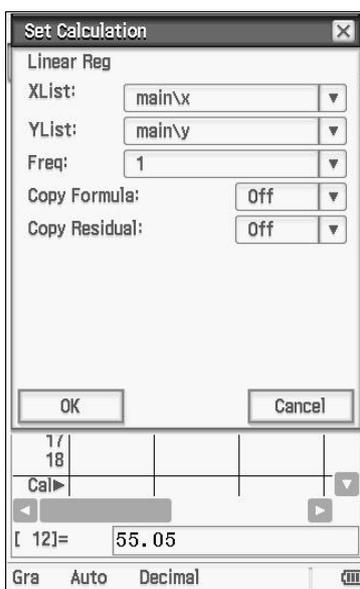


图 11

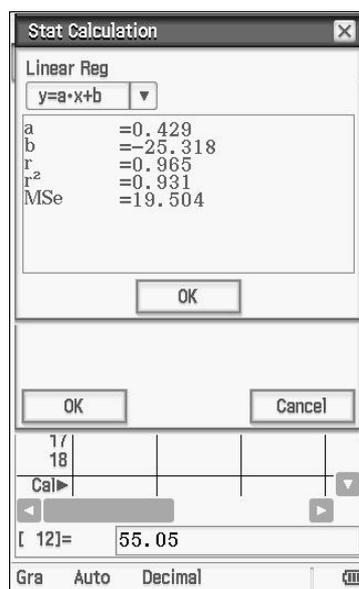


图 12

在信息技术的支撑下，如果我们只是录入数据，直接调用线性回归分析功能得到拟合结果，那么就迷失了《数学 3》中学习模型拟合的方向。在《数学 3》中，要求我们利用由最小二乘法原理得到的线性回归公式进行计算，我们同样可以利用 CASIO fx-CP400 的计算功能进行探索，如图 14 所示，先计算出 \bar{x} , \bar{y} ，再利用公式依次计算系数 b 与 a ，两个公式得到的 b 值相同，也与直接调用指令得到的拟合函数结果相同。

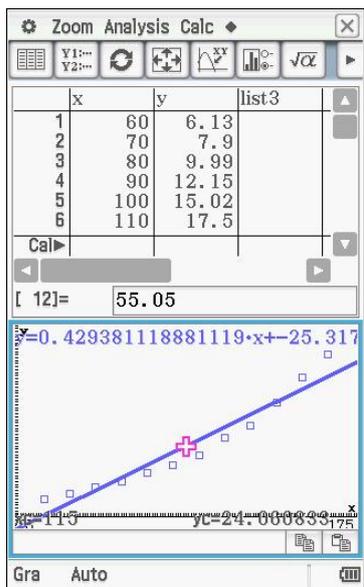


图 13

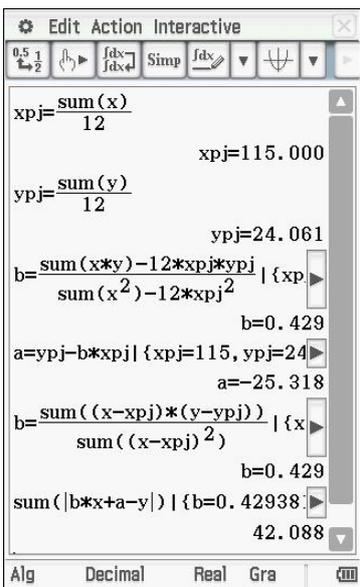


图 14

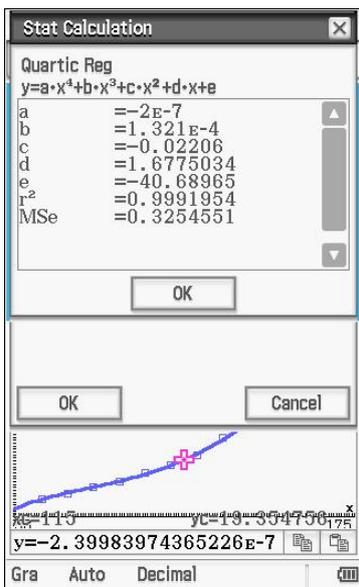


图 15

再进一步计算偏差和，如图 14 所示，其结果为 42.088，拟合效果不如前面待定系数法得到的任何模型。

虽然线性回归分析对此例的拟合效果不如待定系数法得到的模型拟合效果好，但模型拟合的方法上升了一个档次，拟合效果不好的原因是选取的一次函数模型不恰当。例如我

们将回归分析的模型改为四次函数，如图 15 所示，得到了拟合程度非常好的回归分析模型，但在《数学 3》中介绍四次回归，只能作为必修教材的拓展，到选修系列中才能正式学习非线性回归。

四、非线性回归登上巅峰

在选修系列的教材中“统计案例”的章节，再次介绍回归分析，许多人以为与《数学 3》内容有重复之嫌，但这部分的内容是线性回归与非线性回归。理科生在学习中，更应当注重非线性回归化线性回归的过程，将模型拟合推上巅峰。

利用 CASIO fx-CP400 探索回归分析问题，有许多函数模型可以选取（见图 10），这里我们采用与《数学 1》待定系数法研究时选取的指数型函数进行拟合，得到的结果如图 16 所示，从而具体的函数模型是 $y = 2e^{0.02x}$ ，即 $y = 2(e^{0.02})^x$ ，计算 $e^{0.02} \approx 1.02$ ，从而得到的拟合模型是 $y = 2 \times 1.02^x$ ，这十分贴近之前待定系数法得到的指数型函数模型，计算其偏差和结果为 7.175（如图 17 所示），**不如 $y = 1.97 \times 1.02^x$ 的拟合效果，算 r 验证了结论，巧合?!!!**

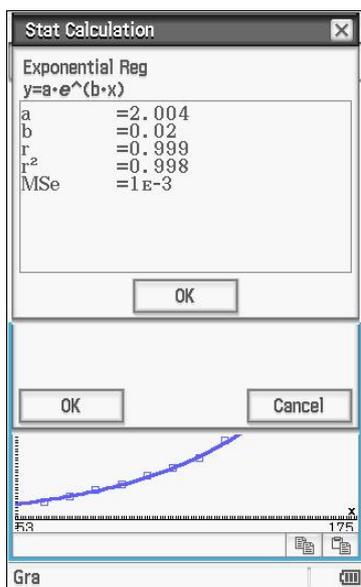


图 16

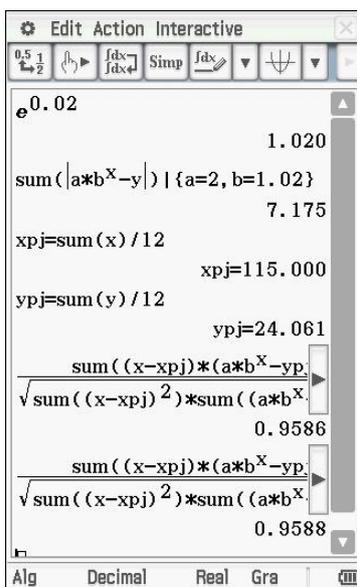


图 17

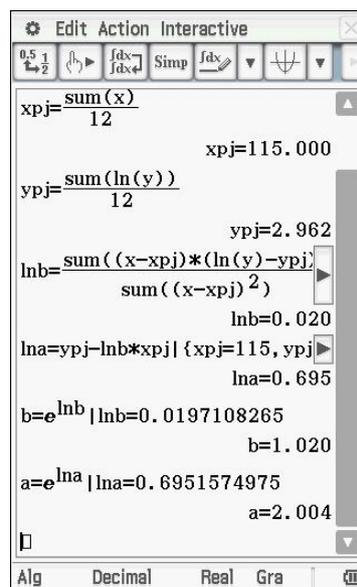


图 18

同样，我们的研究不能停留在技术的层面，一定要回归到数学知识与方法，我们知道 $y = a \cdot b^x$ 两边取自然对数之后，得到 $\ln y = \ln a + x \cdot \ln b$ ，从而通过对数运算可以将非线性回归分析化为线性回归分析，其计算过程如图 18 所示，结果与直接指令的结果相同，然而图 18 的代数运算过程，才是数学的灵魂。

小结语：

以上函数模型拟合探索之路，可以让函数模型拟合之法更为清晰，同时在探索的过程中感受到技术的价值与魅力。但我们要特别注意，在学生阶段，图形计算器在代数运算中的运用，应当只是为数学学习减少繁琐的计算，而所要求掌握的知识与方法，不应因为技术而淡化。

（作者：广东图形计算器课题组成员 高建彪 写于 2014 年 9 月 27 日）

参考文献：

- [1] 徐勇, 高建彪. 借助图形计算器 CAS 功能解高考题[J]. 中国数学教育 (高中版), 2012(11): 39-44.
- [2] 高建彪. 卡西欧图形计算器 CAS 代数运算功能在高中数学中的应用探索, 2013.